

Übungsaufgaben zur Wiederholung Ma-LK

ANALYSIS	2
E-FUNKTIONEN	2
AUFGABE A1	2
AUFGABE A2	2
AUFGABE A3	2
AUFGABE A4	2
AUFGABE A5	3
AUFGABE A6	3
GANZRATIONALE FUNKTION	3
AUFGABE A7	3
GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN	3
AUFGABE A8	3
AUFGABE A9	3
AUFGABE A10	4
AUFGABE A11	4
AUFGABE A12	4
AUFGABE A13	4

Hinweise:

- Viele weitere Übungsaufgaben gehen aus dem Unterricht und den entsprechenden Lehrbüchern hervor.
- Die Zusammenstellung der Aufgaben erfüllt nicht den Anspruch der Vollständigkeit, d.h. nicht alle im Unterricht behandelten Inhalte / Prüfungsschwerpunkte werden mit diesen Übungsaufgaben wiederholt.

Viel Spaß und erfolgreiches Üben

ANALYSIS

e-Funktionen

Aufgabe A1

Für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktionsschar $f_k : f_k(x) = (2kx + 4) \cdot e^{-\frac{kx}{2}}$ gegeben. ($ID = \mathbb{R}$)

- Untersuche die Schar auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte und Randverhalten ($|x| \rightarrow \infty$)! Welchen Wertebereich besitzt f_k ? Zeichne die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 in ein Koordinatensystem!
- Vom Punkt $A(-3/0)$ aus wird eine Tangente an den Graphen von f_1 im 2. Quadranten gelegt. Welche Gleichung hat diese Tangente? Welche Koordinaten hat der Berührungspunkt?
- Die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a > -\frac{1}{2}$ schneidet den Graphen von f_1 in P und die x -Achse in Q . Die Punkte P , Q und $R(-\frac{1}{2}/0)$ bilden ein Dreieck. Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
- Bestimme die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f_k mit der x -Achse im 2. Quadranten einschließt!

Aufgabe A2

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k : f_k(x) = (x - k) \cdot e^{2 - \frac{x}{k}}$; $ID_{f_k} = \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{R}^+$

- Bestimme das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionsgrenzen. Berechne die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, der Extrem- und Wendepunkte. Gib den Wertebereich der Schar an. Zeichne den Graphen der Funktion f_2 .
- Welches ist die Gleichung des geometrischen Ortes aller Extrempunkte der Schar (mit Definitionsbereich)?
- Zeige, dass jede Wendetangente senkrecht auf der Tangente in der Nullstelle des Graphen steht!
- Der Graph von f_k begrenzt im 1. Quadranten mit der x -Achse eine ins Unendliche reichende Fläche. Berechne die Maßzahl dieser Fläche!

Aufgabe A3

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k : f_k(x) = (x^2 + k) \cdot e^x$; $ID_{f_k} = \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{R}$

- Untersuche das Verhalten von f_k an den Rändern des Definitionsbereiches. Berechne die Koordinaten markanter Punkte und zeichne die Graphen von f_{-3} , f_0 und f_3 in ein Koordinatensystem!
- Welche Kurve der Schar hat an der Stelle $x=1$ ein relatives Minimum? Wie groß ist dieses Minimum?
- Die Menge der Hochpunkte der Graphen von f_k bildet eine Kurve. Berechne die Gleichung dieser Kurve und gib ihren Definitionsbereich an.
- Führe für die Funktion $g : g(x) = -2xe^x$ eine sich auf das Wesentliche beschränkende Kurvendiskussion durch. Berechne die Schnittpunkte der Graphen von f_{-3} und g miteinander. Zeichne den Graphen von g in das Schaubild zu Teilaufgabe a)
- Bestimme die Maßzahl der Fläche, die die Graphen von f_{-3} und g miteinander einschließen!

Aufgabe A4

Gegeben sind die Funktionen f_k mit $f_k(x) = xe^{1-kx}$ $x, k \in \mathbb{R}$

- Bestimme für $k=1$ den Definitionsbereich von f_1 . Untersuche das Verhalten des Graphen G_1 für $x \rightarrow \pm\infty$. Ermittle die Schnittpunkte des Graphen von G_1 mit den Koordinatenachsen.
- Zeige, dass die Funktion f_1 nur im Punkt $E(1|1)$ ein relatives Extremum und nur bei $W(2|\frac{2}{e})$ einen Wendepunkt hat.
Um welche Art von Extrempunkt handelt es sich?
- Zeichne den Graphen der Funktion f_1 . (1LE = 1cm).
- Berechne die Fläche, welche der Graph der Funktion f_k , die x -Achse sowie die Gerade $x=7$ einschließen?
- Es sei g mit $g(x) = xe^{1-x} - e^x + 3$ eine weitere Funktion. Die Funktionen f_1 , g und die y -Achse begrenzen im 1. Quadranten eine abgeschlossene Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche!
- Für welche $k \in \mathbb{R}$ besitzen die Graphen G_f der Funktionen f_k Extrempunkte? Gib die Art des Extrempunktes und dessen Koordinaten an! Auf dem Graphen welcher Funktion liegen alle Extrempunkte E_k ?
- Ermittle die Gleichung der Tangenten, die vom Punkt $P(-\frac{1}{2}|0)$ an den Graphen der Funktion f_k (mit $k=1$) gelegt wird!

Aufgabe A5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

- Untersuchen die Funktion f auf Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte und gib den Definitions- und Wertebereich an. Zeichne den Graphen von f .
- Zeige rechnerisch, welche der gegebenen Funktionen Stammfunktion von f ist:

$$(1) F(x) = 5 \cdot e^{-x} \quad (2) F(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3) F(x) = -\frac{5}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- Schraffiere u. berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse zwischen den Wendestellen von f .

Aufgabe A6

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = kx^2 e^{-x+1,5}$; $k \in \mathbb{R}^+$; $x \in \mathbb{R}$

- Untersuche die Funktionen f_k auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte und Verhalten im Unendlichen? Welche Aussagen kannst Du über die Symmetrie der Graphen der Funktionsschar machen? Auf welcher Geraden liegen die Hochpunkte aller Graphen?
- Zeichne den Graphen von f_2 im Bereich $-1 \leq x \leq 6$.
- Gib je eine Gleichung der Tangente im Tiefpunkt und im Wendepunkt von f_k . Zeichne diese für $k=2$ ein.
- Welche Fläche begrenzt die Funktion f_2 ($k=2$) im 1. Quadranten?
- Wie muss man k wählen damit die Funktion f_k über dem Intervall $[0;2]$ den Inhalt 5FE einschließt?

Ganzrationale Funktion

Aufgabe A7

Gegeben ist f_k durch $f_k(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}k^2x^2$; $k > 0$

- Zeige, dass alle Funktionen f_k im 1. Quadranten den Wendepunkt $WP(k/\frac{5}{9}k^4)$ sowie die Wendetangente t mit $t_k(x) = \frac{8}{9}k^3x - \frac{1}{3}k^4$ besitzen.
- Der Graph von f_k , die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x -Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(k)$. Berechne $A(k)$! Wie groß ist diese Fläche A für $k=2$?
- Für $k=2$ soll die Wendetangente über dem Intervall $[0; \frac{3}{4}]$ um die x -Achse rotieren. Berechne das Volumen des dadurch entstehenden Rotationskörpers.

Gebrochenrationale Funktionen

Aufgabe A8

Gegeben ist die Funktionsschar f_k durch (1) $f_k(x) = \frac{kx^2 - 4}{x^2}$; $k > 0$ (2) $f_k(x) = \frac{kx^2 - \frac{1}{2}}{x}$; $k > 0$

- Bestimme den Definitionsbereich und das Randverhalten („Verhalten für betragsgroße x “ und „Verhalten in der Nähe der Definitionslücken“)
- Welche Asymptoten besitzen die Graphen von f_k
- Untersuche die Graphen G_k auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x -Achse und Extrempunkte und Wendepunkte.
- Zeichne den Graph von G_1 sowie die Asymptoten.

Aufgabe A9

Gegeben sind die Funktionen f_t und F_t durch $f_t(x) = \frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}$ und $F_t(x) = \frac{1}{1+t^2x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Untersuchen Sie den Graphen f_t auf Symmetrie, Asymptoten, Achsenschnittpunkte und Extrempunkte.
- Zeichnen Sie f_1 und F_1 in ein Koordinatensystem für $-3 \leq x \leq 3$ (1 LE $\hat{=}$ 2cm).
- Untersuchen Sie für welche t die Graphen von f_t und F_t
 - genau zwei gemeinsame Punkte haben
 - genau einen Berührungspunkt besitzen.

- d) Beweisen Sie auf zwei verschiedene Weisen, dass F_t Stammfunktion von f_t ist. Bestimmen Sie damit die Extrem- und Wendepunkte des Schaubildes von F_t .
- e) Berechnen Sie den Inhalt $A(c)$ der Fläche, die vom Graphen von f_t , der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = c$ ($c > 0$) im 4. Quadranten eingeschlossen wird. Berechnen Sie $\lim_{c \rightarrow \infty} A(c)$?

Aufgabe A10

Gegeben ist die Funktionsschar $f_k : f_k(x) = \frac{kx-1}{x^2} ; x \in \text{ID}_{f_k} ; k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Schar und untersuche detailliert das Verhalten der Scharkurven an den Rändern des Definitionsbereiches. Bestimme die Koordinaten der markanten Punkte der Scharkurven und zeichne die Graphen von f_2 und f_{-2} in ein Koordinatensystem.
- b) Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes aller Extrempunkte der Schar und zeichne den Graph mit in das Koordinatensystem!
- c) Zeige, dass die verschiedenen Graphen der Schar keine gemeinsamen Punkte haben, sich aber für $|x| \rightarrow \infty$ beliebig nähern.
- d) Bestimme die Maßzahl der Fläche den Graphen von f_2 und f_{-2} über dem Intervall $[2;8]$.

Aufgabe A11

Gegeben sei die Schar von Funktionen $f_k : f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k^2} ; x \in \text{ID}_{f_k} ; k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Untersuche das Verhalten der Scharfunktionen an den Rändern des Definitionsbereiches. Bestimme die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, der Extrem- und Wendepunkte. Zeichne die Graphen von $f_{0,5}$ und f_1 in ein Koordinatensystem. Gib den Wertebereich der Funktionsschar an!
- b) Bestimme die Funktionsgleichung der Ortslinie aller Wendepunkte der Schar!
- c) Berechne die Nullstellen der Wendetangenten der Schar!
- d) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) dx$ existiert.

Aufgabe A12

Gib den Term einer gebrochen rationalen Funktion an, deren Graph...

- a) die Gerade $x = 4$ als Asymptote hat und die Nullstelle $x=3$ besitzt.
- b) die Geraden $h: y = 2$ und $g: x = 0$ als Asymptoten hat und zur y-Achse symmetrisch ist.
- c) punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und die Geraden $g: y = x$ sowie $h: x=2$ als Asymptoten hat.

Aufgabe A13

- a) Bestimme die lokalen Extrema in Abhängigkeit von k ! $f_k(x) = \frac{kx^2}{x-k}$
- b) Wie muss man k wählen, damit die Tangente an den Punkt $P(1/f(1))$ parallel zur Gerade $g: y = -2x-3$ verläuft?