Übungsaufgaben zur Wiederholung Ma-LK

Hinweise:

- Viele weitere Übungsaufgaben gehen aus dem Unterricht und den entsprechenden Lehrbüchern hervor.
- Die Zusammenstellung der Aufgaben erfüllt nicht den Anspruch der Vollständigkeit, d.h. nicht alle im Unterricht behandelten Inhalte / Prüfungsschwerpunkte werden mit diesen Übungsaufgaben wiederholt.

Viel Spaß und erfolgreiches Üben

ANALYTISCHE GEOMETRIE / LINEARE ALGEBRA

Vermischte Übungen

Aufgabe G1

1A Gib die Gleichung einer Geraden g an, die

a) durch $A(-3|4|-3)$ u. $B(0|-k|k^2)$ $k \in \mathbb{R}$ verläuft. b) durch $P(13|-5|11)$ und parallel zur $x_1x_3-\text{Ebene}$ verläuft.

c) durch die Mittelpunkte aller Strecken $\overline{AB}$ mit $A(2-s|\sqrt{s}|-2)$ und $B(s|3\sqrt{s}|s^3)$ wobei $s \in \mathbb{R}^+$ verläuft.

d) durch $P(2|-\frac{3}{4}|-4)$ und orthogonal zur Gerade h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\4\\10\end{pmatrix}$ verläuft.

1B Gib die Gleichung einer Ebene E in Parameterform sowie Koordinatenform an, die

a) durch die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\-4\\0{,}5\end{pmatrix}$ und den Punkt $P(-2|2|5)$ festgelegt ist.

b) parallel zur $x_2x_3-\text{Ebene}$ verläuft und die $x_1-\text{Achse}$ im Punkt $Q(-5|0|0)$ schneidet.

c) die den Koordinatenursprung enthält und orthogonal zur Geraden g aus a) verläuft.

1C Prüfe, ob die Punkte auf einer Geraden liegen?
$A(2|3|-1)$ $B(4|-1|5)$ $P(3|1|2)$

1D Gegeben sind $A(2|5|-2)$ $B(5|2|1)$ $C(1|-2|-1)$ $D(-2|1|-4)$!

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist!
b) Prüfen Sie, ob das Parallelogramm ein Rechteck ist? c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms!

1E Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder gleichseitig ist! $A(3|7|2)$, $B(-1|5|1)$, $C(2|3|0)$

1F Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden! Falls vorhanden, berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel:

a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}17\\15\\6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ $k:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$ $k:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2{,}5\\4\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$

1G Gegeben sind: (1) $P(0|1|2)$ $Q(2|0|4)$ $R(4|8|0)$ (2) $P(1|1|1)$ $Q(2|2|3)$ $R(10|4|6)$

a) Zeigen Sie, dass die gegebenen Punkte die Lage von Ebenen bestimmen?
b) Bestimmen Sie die Ebenengleichungen in Parameterform, Koordinatenform und Hesse Form!
c) Untersuchen Sie die Lage der Ebenen zueinander!

1H Gegeben sind eine Gerade g durch einen Punkt A und durch den Richtungsvektor $\vec{v}$ sowie eine Ebene durch eine Koordinatengleichung. Bestimme den Schnittpunkt von Gerade und Ebene!

a) $A(1|2|3)$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ $E: x_1-2\cdot x_2-2\cdot x_3=6$ b) $A(2|-1|1)$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ $E: x_1+x_2-3\cdot x_3=1$

1J Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und R von der Ebene!

a) $P(2|-1|2)$ $R(0|0|0)$ $E: 2\cdot x_1+x_2+2\cdot x_3=6$ b) $P(1|0|1)$ $R(0|0|0)$ $E: x_1-x_2+x_3=9$

Komplexe Aufgaben

Aufgabe G2

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche durch die Punkte A(3/-2/1); B(3/4/-1); C(-1/4/-1); D(-1/-2/1) und der Spitze (1/4/9) gegeben.
Die Seitenkanten der Pyramide durchstoßen eine Ebene E_1 in den Punkten E; F(2/4/4); G(0/4/4) und H(0,5/2,5/7).

a) Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem!
b) Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes M der Diagonalen der Grundfläche. Zeige, dass die Pyramide ABCDS gerade ist.
c) Diese Pyramide soll für die Herstellung einer Trinkpackung genutzt werden.
Wie viel Flüssigkeit kann in der Packung aufbewahrt werden?
d) Gib je eine Darstellung der Ebene E_2(ABC) und E_3(CDS) sowie der Gerade g(AS) an.
e) Berechne folgende Winkel: $\angle(E_1;E_2)$ und $\angle(E_1;g)$

f) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E_1(EFGH)!

g) Bestimme die Koordinaten des Durchstoßpunktes E der Kante AS mit der Ebene E_1(EFGH)

h) Zeige, dass das Viereck EFGH ein gleichschenkliges Trapez darstellt. Veranschauliche dieses Viereck im Koordinatensystem.

i) In welchem Verhältnis teilt der Punkt E die Kante AS ?

j) Durch die Ebene EFGH wird die Pyramide ABCDS in einen Pyramidenstumpf und eine kleine schiefe Pyramide geteilt. Berechne das Volumen dieser beiden Teilkörper.

k) Bestimme die Schnittgerade sowie den Schnittwinkel der Ebene EFGH mit der x_1-x_2-Ebene.

<u>Aufgabe G3</u>

Gegeben sind drei Punkte $P_1(0/3/-6)$, $P_2(2/0/-2)$ und $P_3(4/-2/1)$

a) Prüfe, ob Punkt P_3 auf der Geraden g_1 , welche durch die Punkten P_1 und P_2 bestimmt ist, liegt.

b) Untersuche die Lage der Geraden g und k $\mathrm{g}: \ \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{r}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{k}: \ \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Gegeben ist eine Ebene E_1 durch die Punkte P_1, P_2 und P_3. Bestimme eine Parameterdarstellung, eine Normalform und eine Koordinatendarstellung.

d) Gegeben ist eine Ebene E_2 $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6$ und eine Gerade g_2 durch die Punkte A(1/2/3) und B(3/3/0). Bestimme den Durchstoßpunkt der Geraden g_2 mit der x_1-x_3-Ebene. Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von Gerade g_2 und Ebene E_2.

e) Welche Untersuchungen bzw. Berechnungen muss man durchführen, um zu prüfen, ob ein Dreieck gleichschenklig, rechtwinklig bzw. gleichseitig ist. Beschreibe nur den Lösungsweg!