Formelsammlung Analysis

Potenzgesetze:			**Wurzelregeln:**
$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $\quad (e^a)^b = e^{ab}$	$\frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

Logarithmenregeln:			
$\log_b a = y \quad \Leftrightarrow b^y = a$	$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$	$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$	$\log(a^t) = t \cdot \log(a)$
Spezielle Fälle mit „e“:	$\ln(e) = 1 \quad \ln(e^x) = x$	$e^0 = 1 \quad e^1 = e \quad e^{\ln x} = x$	

p-q-Formel	$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Ableitungsregeln:			
Potenzregel: $f(x) = ax^n$ $f'(x) = anx^{n-1}$	Kettenregel: $f(x) = u(v(x))$ $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Integrationsregeln:			
Potenzregel: $f(x) = ax^n$ $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$	e-Funktionen: $f(x) = ke^{mx+b}$ $F(x) = \frac{k}{m} e^{mx+b}$	Alle Stammfunktionen: $G(x) = F(x) + c \quad ; c \in \mathbb{R}$	Integral: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Integrationsverfahren:		
Produktintegration: $\int u \cdot v' = [u \cdot v] - \int u' \cdot v$	Substitution: $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \;; \quad u = g(x);\; u' = g'(x) = \frac{du}{dx}$	Sonderfall: $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln\lvert f(x)\rvert \right]_a^b$

Rotationsvolumen bei Drehung des Graphen von f um die x-Achse: $V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Kurvendiskussion:			
Nullstellen: $f(x) = 0$	Extrempunkte: $f'(x) = 0 \wedge$ $[f''(x) \neq 0 \vee \text{VZW bei } f'(x)]$	Symmetrie (allg.) as zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$	ps zu (0/0): $f(x) = -f(-x)$
Achsenschnittpunkte: $S_x(NS/0)$; $S_y(0/f(0))$	Wendepunkte: $f''(x) = 0 \wedge$ $[f'''(x) \neq 0 \vee \text{VZW b. } f''(x)]$	Symmetrie bei ganzrat. Fkt.: as zur y-Achse: nur gerade Exp. ps zu (0/0): nur ungerade Exp.	Symmetrie bei gebr. rat. Fkt.: as zur y-Achse: as/as; ps/ps ps zu (0/0): ps/as; as/ps
Asymptoten: $g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \qquad g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$		gebrochen rationale Funktionen: $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{N(x)}$	Nach Polynomdivision: g(x) ganzrationaler Anteil: r(x) Rest

Definitionsbereich gebrochenrationaler Funktionen:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\text{NS von } N(x)\}$

Analytische Geometrie – Lineare Algebra

Vektoren

Länge eines Vektors:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Skalaprodukt:

$\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Winkel zwischen Vektoren :

$\alpha = \angle(\vec{a};\vec{b})$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Orthogonalität von Vektoren:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$

Parallelität von Vektoren:

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad k \in \mathbb{R}$

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{c} \perp \vec{a}$ *und* $\vec{c} \perp \vec{b}$

Flächeninhalt des von $\vec{a};\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm

$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

$\alpha = \angle(\vec{a};\vec{b})$

Spatprodukt:

$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$

Volumen des von $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ aufgespannten Spates:

$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}|$

Länge der Strecke $\overline{AB}$

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Mittelpunkt M d. Strecke $\overline{AB}$:

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad \vec{m} = \overrightarrow{OM}$

Teilverhältnis k:

$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{TB}$

$k \in \mathbb{R};\ k \neq -1$

Geraden und Ebenen

Geradengleichung:

g: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{x}$ Ortsvektor zu Punkt X auf g

$\vec{p}$ Stützvektor

$\vec{u}$ Richtungsvektor

Parameterform PF einer Ebene:

E: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\vec{x}$ Ortsvektor zu Punkt X auf E

$\vec{p}$ Stützvektor

$\vec{u}$; $\vec{v}$ Spannvektoren

Normalenform NF einer Ebene:

E: $\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$\vec{n}$ Normalenvektor

$(\vec{n} \perp \vec{u};\vec{v})$

Hessesche Normalenform :

E: $\dfrac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} * (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

Koordinatenform KF einer Ebene:

E:

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$

Es gilt: $d = \vec{n} * \vec{p}$

Schnittwinkel φ zwischen zwei Geraden g, h:

$\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Schnittwinkel φ zwischen zwei Ebenen E_1, E_2:

$\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1 * \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Schnittwinkel α zwischen Gerade g und Ebene E:

$\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} * \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ bzw. $\cos\beta = \dfrac{|\vec{u} * \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ mit $\alpha = 90° - \beta$

Abstand Punkt P – Ebene E:

$d(E,P) = \left| \dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 - d}{|\vec{n}|} \right|$

Abstand windschiefer Geraden g, h

g: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{q} + \mu\vec{v}$

$d(g,h) = \left| \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} * (\vec{q} - \vec{p}) \right|$ wobei $\vec{n} \perp \vec{u};\vec{v}$

Kreise

Kreisgleichung:

k: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ bzw. $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

r Radius ; $\vec{m}$ Ortsvektor zum Mittelpunkt

Tangente im Punkt B:

t: $(\vec{x} - \vec{m})(\vec{b} - \vec{m}) = r^2$ bzw.

t: $(x_1 - m_1)(b_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(b_2 - m_2) = r^2$

Kugeln

Kugelgleichung:

K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ bzw. K: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

r Radius ; $\vec{m}$ Ortsvektor zum Mittelpunkt

Tangentialebene in Punkt B:

T: $(\vec{x} - \vec{m})(\vec{b} - \vec{m}) = r^2$ bzw.

T: $(x_1 - m_1)(b_1 - m_1) + (x_2 - m_2)(b_2 - m_2) + (x_3 - m_3)(b_3 - m_3) = r^2$

Stochastik

Zufallsvariablen/ Merkmale und Wahrscheinlichkeitsverteilungen / empirische Verteilungen:

Erwartungswert:

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Mittelwert bei der empirischen Verteilung

$$\overline{x} = x_1 \cdot h(x_1) + \ldots + x_n \cdot h(x_n)$$ h relative Häufigkeit

Varianz: $\sigma^2 = V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$ Empirische Varianz $\overline{s}^2 = (x_1 - \overline{x})^2 \cdot h(x_1) + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 \cdot h(x_n)$	Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$ Empirische Standardabweichung: $\overline{s} = \sqrt{\overline{s}^2}$

Wahrscheinlichkeiten

Ergebniswahrscheinlichkeiten: $P(A \cap B)$ = P („A und B“) $P(A \cup B)$ = P(„A oder B“)	Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ Multiplikationssatz $P(A \cap B)= P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Satz von Bayes: $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)} \cdot P_A(B)$

Tschebyscheff: $P(\lvert X-\mu \rvert \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$; $P(\lvert X-\mu \rvert < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}$	Gesetz der großen Zahlen für Bernoulli-Experimente: $P(\lvert h - p \rvert < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ h: relative Häufigkeit für Treffer p: Trefferwahrscheinlichkeit

Bernoullikette – Binomialverteilung

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ P(X=k) Wahrscheinlichkeit für k Erfolge p Erfolgswahrscheinlichkeit q=1-p	Erwartungswert binomial-verteilter Zufallsvariablen: $E(X) = n \cdot p$	Varianz binomialverteilter Zufallsvariablen: $V(X) = n \cdot p \cdot q$

Ablesen aus der Tabelle:

$P(X \leq k) = F_{n;p}(k)$	$P(k_1 \leq X \leq k_2) = F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1 - 1)$
$P(X > k) = 1 - F_{n;p}(k)$	$P(k_1 < X \leq k_2) = F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1)$
$P(X \geq k) = 1 - F_{n;p}(k - 1)$	$P(X = k) = F_{n;p}(k) - F_{n;p}(k - 1)$

Kombinatorik

Geordnet ; ohne Zurücklegen: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ $= \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ Möglichkeiten	Geordnet ; mit Zurücklegen: n^k Möglichkeiten	Ungeordnet ; ohne Zurücklegen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Möglichkeiten

$n!$ Anzahl der Permutationen

Testen von Hypothesen - Signifikanztest

H_0: Nullhypothese H_1: Gegenhypothese α: Irrtumswahrscheinlichkeit K: Ablehnungsbereich

Linksseitiger Test $H_0: p \geq p_0$ und $H_1: p < p_0$ $K = \{0;\ldots;g_l\}$ $P(X \leq g_l) \leq \alpha$	Rechtsseitiger Test $H_0: p \leq p_0$ und $H_1: p > p_0$ $K = \{g_r;\ldots;n\}$ $P(X \geq g_r) \leq \alpha$	Zweiseitiger Test $H_0: p = p_0$ und $H_1: p \neq p_0$ $K = \{0;\ldots;g_l\} \cup \{g_r;\ldots;n\}$ $P(X \leq g_l) \leq \frac{\alpha}{2}$; $P(X \geq g_r) \leq \frac{\alpha}{2}$

Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Näherungsformel von Poisson: $B_{n,p}(k) \approx \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$ n groß, p klein , $\mu = n \cdot p$ nicht zu groß	Näherungsformel von Moivre-Laplace: Für binomialverteilte Zufallsvariable X gilt bei großem n: $P(X \leq k) \approx \Phi(\frac{k - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}})$ wenn $n \cdot p \cdot q > 9$ Φ Gaußsche Summenfunktion