Formelsammlung: Analysis

Potenzen:

$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$	$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$	$(x^r)^s = x^{r \cdot s}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r$	$\frac{x^r}{y^r} = (\frac{x}{y})^r$

Wurzeln:

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \;\; n \in \mathbb{N}^*, \; x \in \mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

Logarithmusregeln:

$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$	$\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$	$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$	$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$	$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$
$\log_a A^n = n \cdot \log_a A$	$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$	$e^{\ln x} = x$

Binomische Formeln:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Funktionen:

Lineare Funktion	$f(x) = mx + b; \quad m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Horizontalunterschied}}$ Orthogonalität: $f_1 \perp f_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ Parallelität: $f_1 \parallel f_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2$ Punkt-Steigungsform: $y - y_1 = m(x - x_1)$ 2-Punkteform: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Quadratische Funktion	Polynomdarstellung: $f(x) = ax^2 + bx + c$ Scheitelpunktform: $f(x) = a(x-u)^2 + v, \;\; u = -\frac{b}{2a}$ Linearfaktordarstellung: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
p-q-Formel abc-Formel	$x^2 + px + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ $ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ableitungsregeln:

Potenzregel $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$	e-Funktion $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$	Kettenregel $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Funktionsuntersuchung:

Schnittpunkte mit den Achsen	y-Achse: $x = 0$; x-Achse (Nullstellen): $f(x) = 0$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (nur gerade Exp. bei GRF) punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (nur ungerade Exp. bei GRF)
Extrempunkte	notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$ hinreichendes Kriterium: $f'(x) = 0 \land f''(x) \neq 0$ (oder VZW bei f') $f''(x) < 0$ Hochpunkt; $f''(x) > 0$ Tiefpunkt
Wendepunkte	notwendiges Kriterium: $f''(x) = 0$ hinreichendes Kriterium: $f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$ (oder VZW bei f'')
Sattelpunkte	wie bei Wendepunkten, zusätzlich $f'(x) = 0$

Integralrechnung:

Stammfunktionen	$f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \;\; n \neq -1$ $f(x) = e^{mx+b}$, $F(x) = \frac{1}{m}e^{mx+b}$ Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$
Das bestimmte Integral	$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$
Fläche zw. f und x-Achse	$\mathcal{A} = \left\lvert \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right\rvert + \left\lvert \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right\rvert + \ldots; \quad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots NS$ von f
Fläche zw. f und g	$f_{diff}(x) = f(x) - g(x); \quad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ Nullstellen von f_{diff} $\mathcal{A} = \left\lvert \int_{x_1}^{x_2} f_{diff}(x)\,dx \right\rvert + \left\lvert \int_{x_2}^{x_3} f_{diff}(x)\,dx \right\rvert + \ldots$

Formelsammlung: Analytische Geometrie - Lineare Algebra

Operationen:

Betrag	Skalarprodukt	Vektorprodukt
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\vec{a} * \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ oder $\vec{a} * \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\varphi$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ oder $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \sin\varphi$

Punkte, Strecken, Vektoren:

Mittelpunkt M von $\overline{AB}$	Länge von $\overline{AB}$	3 kollineare Punkte	Dreiecksregel
$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,;\,\frac{a_2+b_2}{2}\,;\,\frac{a_3+b_3}{2}\right)$ oder $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	$\overline{AB} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ oder $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Geraden:

Gleichung	Orthogonalität	Parallelität
$g:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$ $\overrightarrow{OX}$ Ortsvektor zu Punkt X auf g $\overrightarrow{OA}$ Stützvektor, $\vec{u}$ Richtungsvektor	$f \perp g \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u} * \vec{v} = 0$ $\vec{u},\ \vec{v}$ Richtungsvektoren	$f \parallel g \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u} = k\vec{v}$ $\vec{u},\ \vec{v}$ Richtungsvektoren $k \neq 0$

Ebenen:

Parameterdarstellung	Koordinatengleichung	Normalenform	Hessesche Normalenform
$\mathbb{E}: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ $\overrightarrow{OX}$ Ortsvektor zu Punkt X auf $\mathbb{E}$ $\overrightarrow{OA}$ Stützvektor, $\vec{u},\ \vec{v}$ Richtungsvektoren $\vec{n} \perp \vec{u},\quad \vec{n} \perp \vec{v},\quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} =$ Normalenvektor	$\mathbb{E}: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{n}$ Normalenvektor	$\mathbb{E}: \vec{n} * \overrightarrow{OX} = \vec{n} * \overrightarrow{OA}$ $\mathbb{E}: \vec{n} * \overrightarrow{OX} = d$ $\mathbb{E}: \vec{n} * (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}) = 0$	$\mathbb{E}:\ \frac{1}{\lvert\vec{n}\rvert}(\vec{n} * \overrightarrow{OX} - d) = 0$ oder $\mathbb{E}:\ \dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$

Abstände:

Abstand vom Punkt P zur Geraden g	Abstand vom Punkt P zur Ebene $\mathbb{E}$
Lotfußpunkt Q berechnen $Abst(P;g) = \overline{PQ} = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^2}$	$Abst(P;\mathbb{E}) = \dfrac{\lvert ap_1 + bp_2 + cp_3 - d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Schnittwinkel von:

Zwei Geraden	Gerade und Ebene	Zwei Ebenen
$\angle(f\,;\,g) = \angle(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \varphi;\qquad \cos\varphi = \dfrac{\vec{u} * \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$	$\angle(g\,;\,\mathbb{E}) = \varphi;\qquad \sin\varphi = \dfrac{\lvert\vec{n} * \vec{v}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$	$\angle(\mathbb{E}_1\,;\,\mathbb{E}_2) = \varphi;\qquad \cos\varphi = \dfrac{\lvert\vec{n}_1 * \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$

Flächen

Dreieck	Parallelogramm	Andere Flächen
$A_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2 - (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC})^2}$ oder $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert$	$A_{ABCD} = \lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert$	werden in Dreiecke zerlegt

Volumina

Tetraeder	Andere Körper
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}A_{ABC} \cdot h$ $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\lvert\vec{n} * \overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert} \cdot \sqrt{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2 - (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC})^2}$	werden in Tetraeder zerlegt

Formelsammlung: Stochastik

- **Laplace Regel**: $p = \dfrac{\#\,\text{günstige Ergebnisse}}{\#\,\text{aller Ergebnisse}}$

- **Empirische Verteilung**:

x_i	$h(x_i)$	$x_i \cdot h(x_i)$	$x_i^2 \cdot h(x_i)$
		$\overline{x} = \dots$	$\overline{s}^2 = \sum \dots - \overline{x}^2$

$\overline{x}$ = Mittelwert

$\overline{s}^2$ = empirische Varianz

$\overline{s} = \sqrt{\overline{s}^2}$ = Standardabweichung

- **Wahrscheinlichkeitsverteilung Verteilung**:

a_i	$P(X = a_i)$	$a_i \cdot P(X = a_i)$	$a_i^2 \cdot P(X = a_i)$
		$\mu = E(X) = \dots$	$V(X) = \sum \dots - \mu^2$

$\mu = E(X)$ = Erwartungswert

$V(X)$ = Varianz

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ = Standardabweichung

- **Binomialverteilung**:

  Bernoulli Versuch, Erfolg, Misserfolg, n, p, q

  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$;

  $\mu = E(X) = n \cdot p$ Erwartungswert;

  $V(X) = n \cdot p \cdot q$ Varianz;

  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ Standardabweichung

Formelsammlung: Wirtschaftsmathematik

Gesamtkostenfunktion	linear: $K(x) = mx + b, \quad m,\ b > 0$ s-förmig: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a,\ c,\ d > 0; \quad b < 0$
Variable Gesamtkosten	linear: $K_v(x) = mx$ s-förmig: $K_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
Fixkosten	linear: $K_f(x) = b$ s-förmig: $K_f(x) = d$
Grenzkosten	$K'(x)$
Stückkosten	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Variable Stückkosten	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Fixe Stückkosten	$k_f(x) = \frac{K_f(x)}{x}$
Preisabsatzfunktion	vollständige Konkurrenz: $p(x) = m$ Angebotsmonopol: $p(x) = mx + b, \quad m < 0, \quad b > 0$ $b =$ Sättigungspreis; $\quad x = -\frac{b}{m} =$ Sättigungsmenge
Ertragsfunktion	$E(x) = p(x) \cdot x$
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Gewinnschwelle (Nutzensschwelle)/ -grenze	$G(x) = 0$
Gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximaler Gewinn	x-Wert des HP von $G(x)$ y-Wert des HP von $G(x)$
Betriebsoptimum Langfristige Preisuntergrenze	x-Wert des TP von $k(x)$ y-Wert des TP von $k(x)$
Betriebsminimum Kurzfristige Preisuntergrenze	x-Wert des TP von $k_v(x)$ y-Wert des TP von $k_v(x)$
Cournot'sche Punkt	$C(x_c\,;\,p_c)$ x_c – Hochpunktstelle der Gewinnfunktion; $\quad p_c = p(x_c)$
Gleichgewichtsmenge/Marktpreis	$S(x_G\,;\,y_G)$ Schnittpunkt von P_N und P_A $x_G =$ Gleichgewichtsmenge; $\quad y_G =$ Gleichgewichtspreis (Marktpreis)
Konsumentenrente/Produzentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)\,dx - \int_0^{x_G} y_G\,dx; \quad PR = \int_0^{x_G} y_G\,dx - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Jahresverzinsung	$K(n) = K(0)(1 + p\%)^n$ n = # Jahre; p% = Zinssatz; K(0) = Anfangskapital; K(n) = Endkapital
Unterjährige Verzinsung	m = # Zinsperioden; p% = nominaler Zinssatz; $i\% = \frac{p\%}{m}$ periodenbezogener Zinssatz $K(r) = K(0)(1 + i\%)^r, \quad 1 \leq r \leq m;$ $K(0) =$ Anfangskapital; $\quad K(r) =$ Kapital nach r Zinsperioden $K(m \cdot n) = K(0)(1 + i\%)^{m \cdot n}$ $n = \#$ Jahre; $\quad K(m \cdot n) =$ Kapital nach n Jahren $p_{\text{eff}}\,\% = (1 + i\%)^m - 1$ effektiver Zinssatz