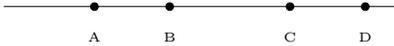
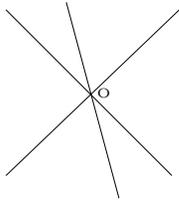


# EBENE GEOMETRIE

1) **Kollineare Punkte:** liegen alle auf einer Geraden.

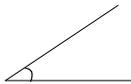


2) **Durch denselben Punkt gehende Geraden:**



3) **Winkeleinteilung:**

- Nullwinkel =  $0^\circ$
- spitzer Winkel:  $< 90^\circ$



- rechter Winkel =  $90^\circ$



- stumpfer Winkel:  $> 90^\circ$

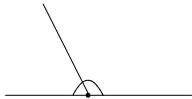


- gestreckter Winkel =  $180^\circ$

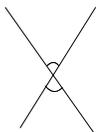


4) **Winkelpaare:**

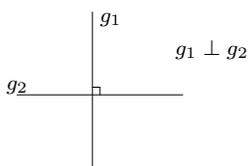
- Nebenwinkel: haben zusammen  $180^\circ$



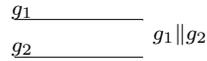
- Scheitelwinkel: zwei einander gegenüberliegende Winkel. Sie sind gleich groß.



5) **Senkrechte (orthogonale) Geraden:** schneiden sich unter einem rechten Winkel:



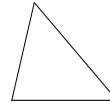
6) **Parallele Geraden:** schneiden sich nicht:



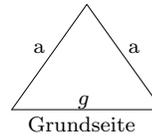
7) **Einteilung der Dreiecke:**

- nach den Seiten:

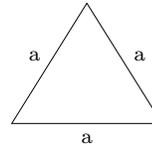
- ★ unregelmäßig: alle Seiten verschieden lang



- ★ gleichschenkelig: zwei gleich lange Seiten

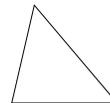


- ★ gleichseitig: alle Seiten gleich lang

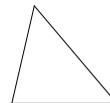


- nach den Winkeln:

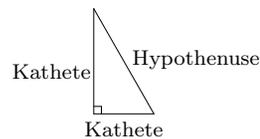
- ★ unregelmäßig: keine besondere Eigenschaften



- ★ spitzwinklig: alle Innenwinkel sind spitz



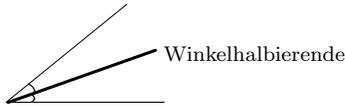
- ★ rechtwinklig: ein rechter Innenwinkel



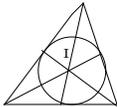
- ★ stumpfwinklig: ein stumpfer Innenwinkel



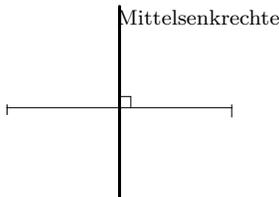
8) **Winkelhalbierende:** der Winkel wird halbiert



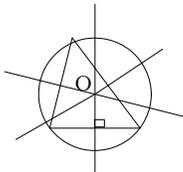
In einem Dreieck gehen die drei Winkelhalbierenden durch  $I$ ;  $I$  ist der Mittelpunkt des Inkreises.



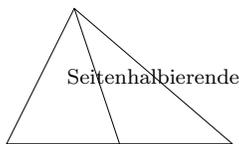
9) **Mittelsenkrechte einer Strecke:** die Senkrechte durch den Mittelpunkt dieser Strecke.



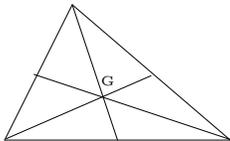
In einem Dreieck gehen die drei Mittelsenkrechten durch  $O$ ;  $O$  ist der Mittelpunkt des Umkreises.



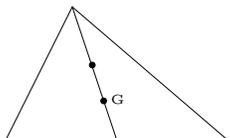
10) **Seitenhalbierende eines Dreiecks:** geht durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.



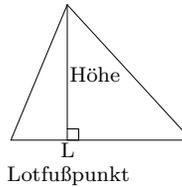
In einem Dreieck gehen die drei Seitenhalbierenden durch  $G$ ;  $G$  ist der Schwerpunkt des Dreiecks.



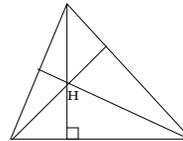
Auf jeder Seitenhalbierenden befindet sich  $G \frac{2}{3}$  vom Eckpunkt und  $\frac{1}{3}$  von der gegenüberliegenden Seite entfernt.



11) **Höhe eines Dreiecks:** Die Senkrechte (das Lot) von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite.



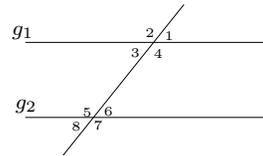
In einem Dreieck gehen die drei Höhen durch  $H$ ;  $H$  ist der Höhenschnittpunkt (Orthozentrum).



12) **Summe der Innenwinkel im Dreieck:**  $180^\circ$

13) **Summe der Innenwinkel in einem konvexen Viereck:**  $360^\circ$

14) **Winkelpaare an geschnittenen Parallelen:**



innere Wechselwinkel:  $\angle 3 - \angle 6$ ;  $\angle 4 - \angle 5$

äußere Wechselwinkel:  $\angle 2 - \angle 7$ ;  $\angle 1 - \angle 8$ ;

Stufenwinkel:  $\angle 1 - \angle 6$ ;  $\angle 2 - \angle 5$ ;  $\angle 3 - \angle 8$ ;  $\angle 7 - \angle 4$ ;

$g_1 \parallel g_2 \iff$  Stufenwinkel oder Wechselwinkel sind gleich groß (ein Paar).

15) **Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks:** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- es hat zwei gleich lange Seiten (die dritte Seite ist  $g$ )

- es hat zwei gleich große Winkel

- die Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte, Höhe und Winkelhalbierende entsprechend der Seite  $g$  sind identisch.

16) **Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks:** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- alle Seiten sind gleichlang

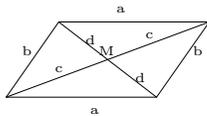
- alle Winkel sind gleichgroß ( $60^\circ$ )

- die Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte, Höhe und Winkelhalbierende entsprechend einer Seite sind identisch.

17) **Eigenschaften eines Parallelogramms:**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

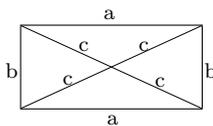
- die Gegenseiten sind jeweils parallel;
- die Gegenseiten sind jeweils gleich lang;
- zwei Gegenseiten sind parallel und gleich lang;
- die Gegenwinkel sind gleich groß;
- jede 2 nebeneinander liegende Innenwinkel haben zusammen  $180^\circ$ ;
- die Diagonalen halbieren sich.



18) **Eigenschaften eines Rechtecks:**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

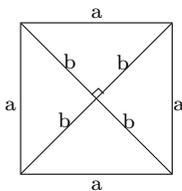
- es ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel;
- alle Winkel sind rechte Winkel;
- die Diagonalen halbieren sich und sind gleich lang.



19) **Eigenschaften eines Quadrats:**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

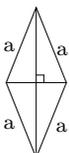
- alle Seiten sind gleich lang und es hat einen rechten Winkel;
- die Diagonalen halbieren sich, sind gleich lang und orthogonal.



20) **Eigenschaften einer Raute (Rhombus):**

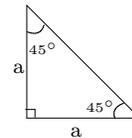
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- alle Seiten sind gleich lang;
- die Diagonalen halbieren sich und sind orthogonal.

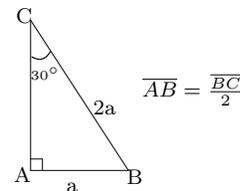


21) **Sätze in einem rechtwinkligem Dreieck**

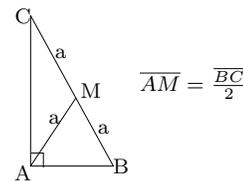
- ★ In einem rechtwinkligem Dreieck haben die zwei spitzen Winkel  $90^\circ$  zusammen.
- ★ In einem rechtwinklig- und gleichschenkligen Dreieck haben die zwei spitzen Winkel  $45^\circ$ .



- ★ Die Gegenkathete eines  $30^\circ$ -Winkels ist halb so lang wie die Hypotenuse.



- ★ Die zur Hypotenuse zugehörige Seitenhalbierende ist halb so lang wie die Hypotenuse.

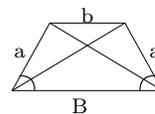


22) **Trapez:** ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Gegenseiten (Grundseiten) und zwei nicht parallelen Gegenseiten (Schenkel).

23) **Eigenschaften eines gleichschenkligen Trapezes:**

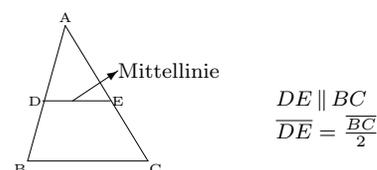
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- die zwei nicht-parallelen Seiten sind gleichlang;
- zwei einer Grundseite anliegende Winkel sind gleich groß;
- die Diagonalen sind gleich lang.



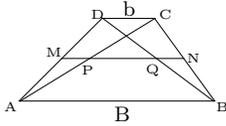
24) **Mittellinie in einem Dreieck:**

Das ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten. Sie ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.



25) **Mittellinie in einem Trapez:**

Das ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte Der Schenkel.



$\overline{MN}$  - Mittellinie  
 $MN \parallel AB \parallel DC$   
 $\overline{MN} = \frac{B+b}{2}$   
 $\overline{PQ} = \frac{B-b}{2}$

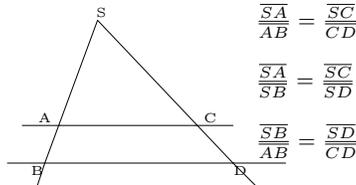
26) **Kongruenzsätze für Dreiecke:**  
 (SWS), (WSW), (SSS), (SSW);

27) **Kongruenzsätze für rechtwinklige Dreiecke:**  
 (KK), (HK), (HW), (KW);

28) **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:**  
 (SSS), (WW), (SWS);

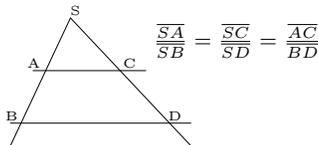
29) **Strahlensätze:** Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelschar geschnitten, gilt:

★ Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.



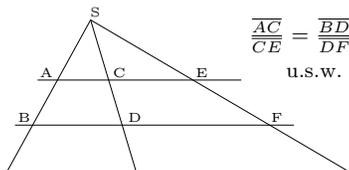
$\frac{SA}{AB} = \frac{SC}{CD}$   
 $\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD}$   
 $\frac{SB}{AB} = \frac{SD}{CD}$

★ Je zwei Parallelabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte ein und desselben Strahls.



$\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD}$

★ Die Abschnitte auf einer Parallelen verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Abschnitte auf einer anderen Parallelen.



$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$   
 u.s.w.

30) **Satz des Pythagoras:**

$\boxed{Hyp^2 = K_1^2 + K_2^2}$  oder  $\boxed{K_1^2 = Hyp^2 - K_2^2}$

31) **Kathetensatz:**

$\boxed{K^2 = Hyp \cdot (\text{zugehöriger Hypotenusenabschnitt})}$

32) **Höhensatz I:**

$\boxed{h^2 = (1. \text{ Hypotenusenab.}) \cdot (2. \text{ Hypotenusenab.})}$

33) **Höhensatz II:**

$\boxed{h = \frac{K_1 \cdot K_2}{Hyp}}$

34) **Trigonometrische Funktionen:**

$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$      $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$   
 $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$      $\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

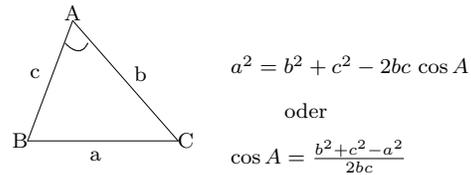
35) **Trigonometrische Formeln:**

- $\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  und  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ ;
- $\sin \alpha > 0$ , egal ob  $\alpha$  spitz oder stumpf;  
 $\cos \alpha > 0$ ,  $\tan \alpha > 0$ ,  $\cot \alpha > 0$  falls  $\alpha$  spitz;  
 $\cos \alpha < 0$ ,  $\tan \alpha < 0$ ,  $\cot \alpha < 0$  falls  $\alpha$  stumpf;

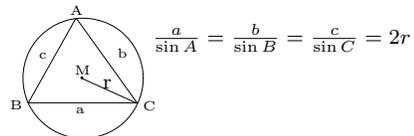
36) **Besondere Werte der trig. Funktionen:**

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

37) **Der Cosinus Satz:**

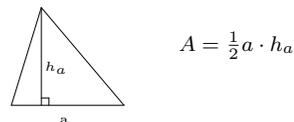


38) **Der Sinus Satz:**

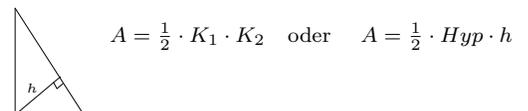


39) **Flächeninhalte:**

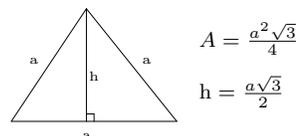
- **Allgemeines Dreieck:**



- **Rechtwinkliges Dreieck:**



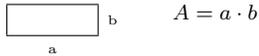
- **Gleichseitiges Dreieck:**



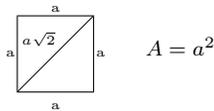
- **Parallelogramm:**



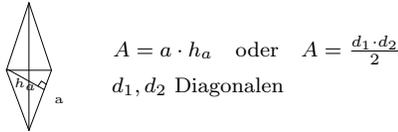
- **Rechteck:**



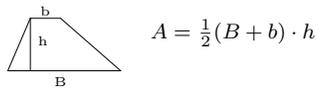
- **Quadrat:**



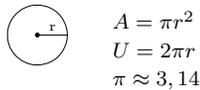
- **Raute:**



- **Trapez:**



- **Kreis:**

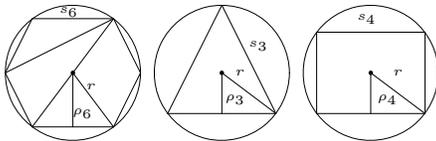


#### 40) Regelmäßige Vielecke:

gleichseitiges Dreieck; Quadrat; regelmäßiges Hexagon

$r$ : Umkreisradius;  $\rho_n$ : Inkreisradius;

$s_n$ : Seitenlänge;  $A_n$ : Flächeninhalt



$$s_3 = r\sqrt{3} \quad \rho_3 = \frac{r}{2} \quad A_3 = 3 \frac{s_3 \cdot \rho_3}{2}$$

$$s_4 = r\sqrt{2} \quad \rho_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad A_4 = 4 \frac{s_4 \cdot \rho_4}{2} = (s_4)^2$$

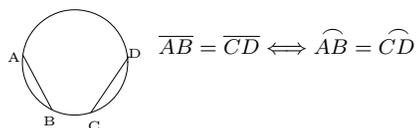
$$s_6 = r \quad \rho_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad A_6 = 6 \frac{s_6 \cdot \rho_6}{2}$$

Große Diagonale im regelm. Hexagon =  $2r$

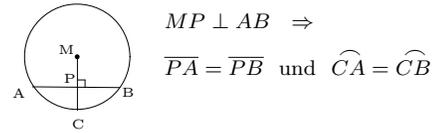
Kleine Diagonale im regelm. Hexagon =  $s_3 = r\sqrt{3}$

#### 41) Kreis:

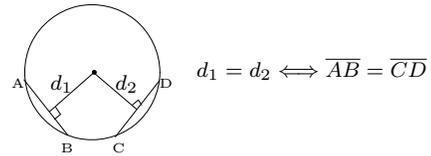
- Gleich lange Sehnen; gleich lange Bogen:



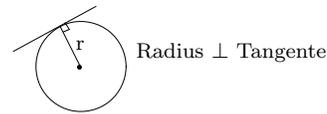
- Mittelsenkrechte einer Sehne:



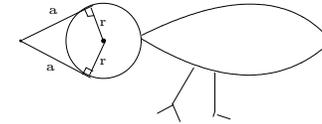
- Abstände vom Mittelpunkt zu 2 Sehnen:



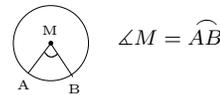
- Radius und Tangente:



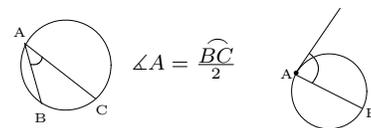
- Die Tangenten von einem Punkt außerhalb des Kreises zum Kreis:



- Zentralwinkel:



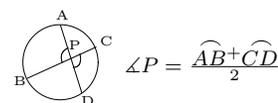
- Peripheriewinkel:



- **Satz des Thales:** ein Winkel dessen Scheitel auf einem Kreis liegt und dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen, ist ein rechter Winkel.



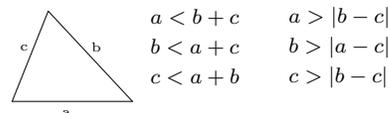
- Innerer Winkel:



- Äußerer Winkel:

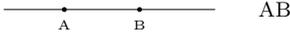


#### 42) Ungleichungen in einem Dreieck:



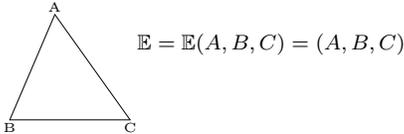
# RAUMGEOMETRIE

- 1) **Bestimmung einer Geraden:**  
durch 2 Punkte geht eine einzige Gerade



- 2) **Bestimmung einer Ebene:**

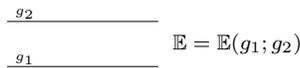
- drei nicht kollineare Punkte:



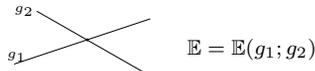
- eine Gerade und ein Punkt außerhalb dieser Geraden:



- zwei parallele Geraden:



- zwei Geraden, die sich schneiden:

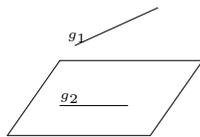


- 3) **Gegenseitige Lagen: zwei Geraden**

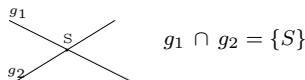
- parallel (keine gemeinsame Punkte; befinden sich in einer Ebene)



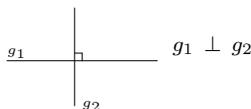
- windschief (keine gemeinsame Punkte; befinden sich nicht in einer Ebene)



- sie schneiden sich (einen gemeinsamen Punkt: Schnittpunkt)



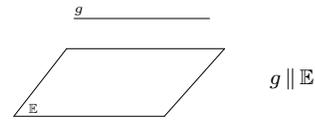
Spezialfall: orthogonal



- identisch:  $g_1 = g_2$

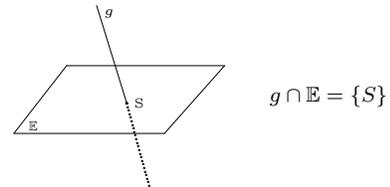
- 4) **Gegenseitige Lagen: Gerade und Ebene**

- parallel (keine gemeinsame Punkte)

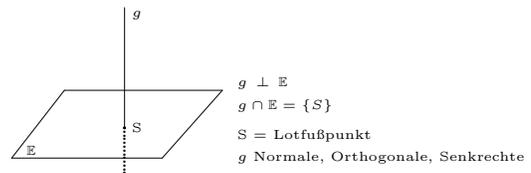


$g \parallel E$  genau dann wenn es eine Gerade  $f$  in  $E$  gibt, sodass  $f \parallel g$ .

- die Gerade durchstößt die Ebene (einen gemeinsamen Punkt)



Spezialfall: orthogonal



$g \perp E \iff$

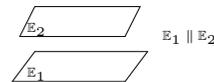
$g$  ist orthogonal zu jeder Geraden  $f \subset E \iff$

$g$  ist orthogonal zu zwei sich schneidenden Geraden  $f_1, f_2 \subset E$

- die Gerade liegt in der Ebene:  $g \subset E$

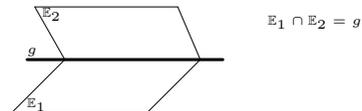
- 5) **Gegenseitige Lagen: zwei Ebenen**

- parallel (keine gemeinsame Punkte)

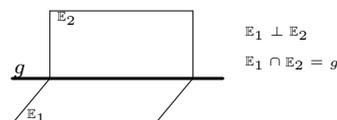


$E_1 \parallel E_2$  genau dann, wenn es zwei sich schneidende Geraden in  $E_1$  gibt, die parallel zu zwei sich schneidenden Geraden in  $E_2$  sind.

- sie schneiden sich (nach einer Geraden)



Spezialfall: orthogonal

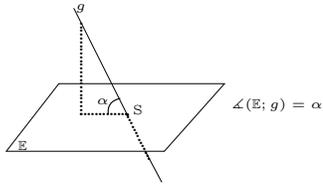


$E_1 \perp E_2$  genau dann wenn es eine Gerade in  $E_2$  gibt, die orthogonal zur Ebene  $E_1$  ist.

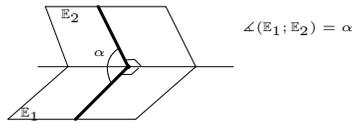
- identisch:  $E_1 = E_2$

6) Winkel zwischen:

- zwei Geraden:
- Gerade und Ebene:



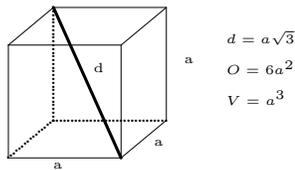
- zwei Ebenen:



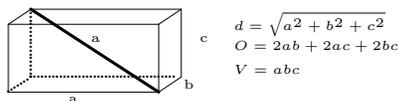
7) Einfache Körper:

$d$ : räumliche Diagonale;  $h$ : räumliche Höhe;  $G$ : Grundfläche;  
 $M$ : Mantelfläche;  $O$ : Oberfläche;  $V$ : Volumen

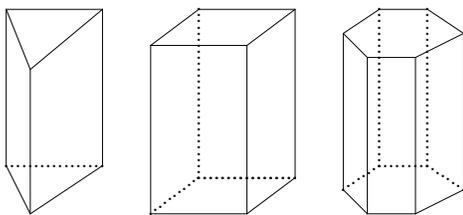
- *Würfel*:



- *Quader*:



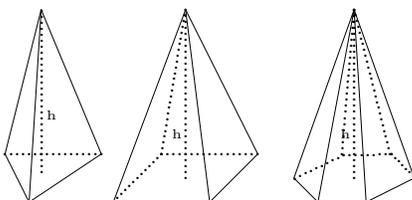
- *Prisma*



$$O = 2G + M$$

$$V = Gh$$

- *Pyramide* (Spezialfall *Tetraeder*)



$$O = 2G + M$$

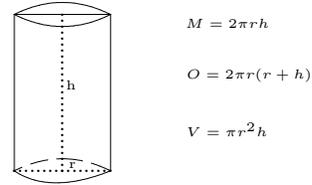
$$V = \frac{1}{3} Gh$$

- *Pyramidenstumpf*:

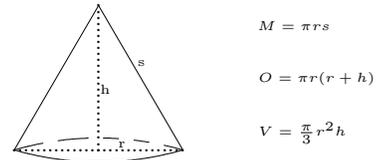
$$V = \frac{h}{3} (G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2})$$

8) Runde Körper

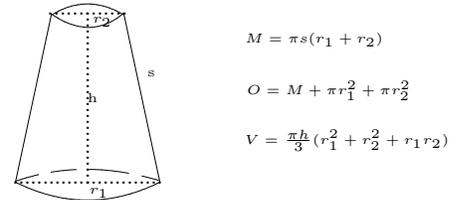
- *Zylinder* (Senkrechter Kreiszyylinder):



- *Kegel* (Senkrechter Kreiskegel):



- *Kegelstumpf* (vom senkrechten Kreiskegel):



- *Kugel*:

