Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Hessisches Kultusministerium

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 8

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

a. Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, r ∈ R.

Berechnen Sie die Schnittpunkte S_{12}, S_{13} und S_{23} der Geraden g mit den drei Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Die Lage bezüglich der drei Koordinatenachsen muss dabei eindeutig zu erkennen sein.

b. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte S_{13}, S_{23} und den Nullpunkt gebildet wird. Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg.

c. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die 1-2-Ebene?

d. Die durch das Dreieck in Aufgabenteil b festgelegte Ebene wird von einer zweiten Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, s, k ∈ R, geschnitten.

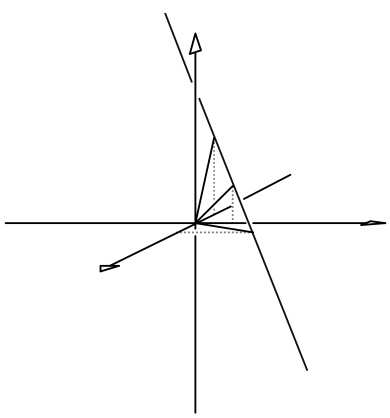
Berechnen Sie die Schnittgerade.

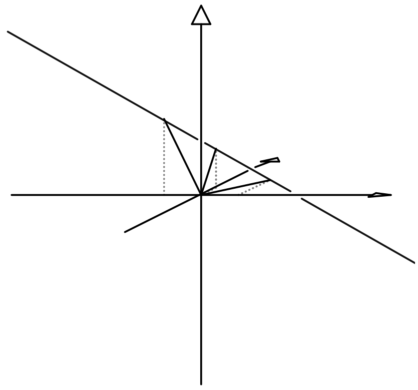
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

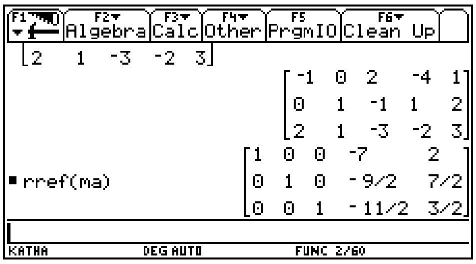
II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe verlangt neben der Beherrschung grundlegender Rechenverfahren der Linearen Algebra räumliches Vorstellungsvermögen im Zusammenhang mit der Lage einer Geraden im Raum bezüglich der Ebenen eines Koordinatensystems.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	1-2-Ebene: $x_3 = 0$ für r = 0, also $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 1-3-Ebene: $x_2 = 0$ für r = 2, also $\vec{x}_{13} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ 2-3-Ebene: $x_1 = 0$ für r = 1, also $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 	4	5		Geometrische Interpretation von Lösungsmengen, Umgang mit Parameterdarstellung von Geraden. Lagebeziehung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum.

	oder  Der räumliche Eindruck muss eindeutig zu erkennen sein.				
b.	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$, also $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, d. h., die drei Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck. $\lvert \vec{x}_{13} - \vec{x}_{23} \rvert = \sqrt{3}$ und $\lvert \vec{x}_{23} \rvert = \sqrt{2}$ Damit A = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}22$ Alternativ kann eine Dreieckshöhe als kürzester Abstand eines Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite berechnet werden. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar beschrieben werden.		8		Skalarprodukt, Länge eines Vektors und Ortogonalität oder Extremwertberechnung
c.	Senkrechte Projektion der Geraden in die 1-2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, s ∈ R Gesucht: Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}816$ $\alpha \approx 35{,}3°$			5	Winkel zwischen Vektoren

<table>
<tr>
<td>d.</td>
<td>Gleichung der 1. Ebene: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems kann mit dem Befehl rref bearbeitet werden:


Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.5 \\ 7.5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -14 \\ 9 \\ 37 \end{pmatrix}$</td>
<td>6</td>
<td>2</td>
<td></td>
<td>Schnitt zweier Ebenen und Bestimmung der Schnittgerade.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Σ 30</td>
<td>10</td>
<td>15</td>
<td>5</td>
<td></td>
</tr>
</table>