Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 1

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Taschenrechner** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Dem menschlichen Körper können Medikamente durch einen Tropf kontinuierlich zugeführt werden. Zu Beginn weist der Körper keine Medikamentenmenge auf, nach In-Gang-Setzen des Tropfes erhöht sich die Medikamentenmenge mit jedem Tropfen, aber zugleich beginnen Nieren und Leber die Substanz wieder auszuscheiden.
Die Funktion m: $t \rightarrow m(t)$, t in Minuten, m in Milligramm gemessen, gebe die Medikamentenmenge im Körper an.

Aufgaben

a. Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion m' für oben beschriebenen Wachstumsprozess.

b. Für ein bestimmtes Medikament gelte $m'(t) = e^{-0,02\,t}$. Bestimmen Sie m(t) unter der Voraussetzung, dass der Tropf zur Zeit t = 0 gestartet wird.

   Es gilt fortan: $m(t) = 50\,(1 - e^{-0,02\,t})$.

c. Zeichnen Sie die Graphen von m und m' für einen sinnvollen Zeitraum und interpretieren Sie deren Verlauf bezüglich der Medikamentenzufuhr.

d. Erläutern Sie, dass $\lim\limits_{t \to \infty} m(t) = 50$ gilt.

   Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Medikamentenmenge 90% dieses Grenzwertes erreicht und den, von dem ab der Zuwachs des Medikaments weniger als 0,5 mg pro Minute beträgt.

e. Berechnen Sie $\int_0^{10} e^{-0,02\,t}\,dt$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Zahl.

f. Nach 5 Stunden wird der Tropf abgesetzt. Der Abbau des Medikaments erfolgt danach mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden.
   Bestimmen Sie den Zeitpunkt, von dem ab die Nachweisgrenze des Medikaments von 1 µg (10^{-3} mg) im Körper unterschritten wird.

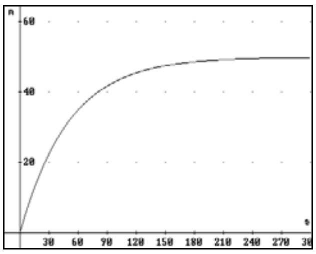
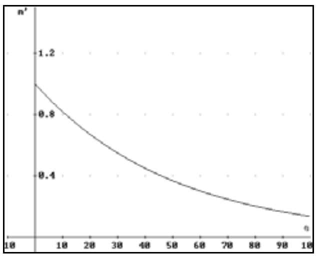
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung

Diese Aufgabe orientiert sich an der Leitidee „Modellieren“. Die Modelle des begrenzten Wachstums und der exponentiellen Abnahme (negatives exponentielles Wachstum) werden am Beispiel der Medikamentenaufnahme durch einen Tropf bzw. des Medikamentenabbaus im Körper benutzt. Dazu sind die Kenntnisse einfacher e-Funktionen, ihrer Eigenschaften und die Beherrschung der Differenziations- und Integrationsregeln notwendig. Wichtig ist neben der Rechnung allerdings die inhaltliche Interpretation.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	Die Ableitung einer Funktion beschreibt die momentane Änderung, hier also die Änderung der Medikamentenmenge in der Zeit	2	2		Bedeutung der Ableitung als Änderungsrate (LP 11)
b.	m(t) = $\frac{1}{-0{,}02}e^{-0{,}02t}+C$ Integrationskonstante ist zu bestimmen: m(0) = -50 + C = 0, C = 50 $\Rightarrow$ m(t) = 50(1 - $e^{-0{,}02t}$)		2	2	Begriff der Strammfunktion und unbestimmtes Integral, Bestimmung des Terms durch Integration
c.	  Die Medikamentenmenge nimmt zunächst schnell, mit wachsender Zeit allmählich immer langsamer zu; für t > 180 ist die Medikamentenmenge nahezu konstant. Der Ableitungsgraph (rechts) zeigt, dass die Änderung (Zunahme) mit wachsendem t immer kleiner wird und sich an Null annähert.	4	5		Interpretation der monoton wachsenden bzw. fallenden Graphen bezüglich der Medikamentenmenge
d.	Der Term $e^{-0{,}02t}=\frac{1}{e^{0{,}02t}}$ wird mit wachsendem t immer kleiner, da der Nenner immer größer wird, und hat als Grenzwert 0. Ansatz: m(t) = 50(1 - $e^{-0{,}02t}$) = 0,9·50 liefert t = -50·ln(0,1) = 50·ln(10) ≈115,13 Ansatz m’(t) = $e^{-0{,}02\,t}$ < 0,5 liefert t > ln(0,5)/-0,02 = 50·ln(2) ≈ 34,66	2	3	2	Verständiger Umgang mit Exponentialfunktionen zeichnerische Lösung (für ersten Zeitpunkt) ist gleichwertig Ansatz mit Gleichung statt Ungleichung soll keinen Punktabzug bringen

e.	$\int_0^{10} e^{-0,02\,t}\,dt = 50(1 - e^{-0,02t})\Big\vert_0^{10} = 9,06$ das ist die Menge des Medikaments, die nach 10 Minuten im Körper vorhanden ist	3		2	Eigenschaften und Anwendung eines bestimmten Integrals Interpretation des bestimmten Integrals
f.	m(300) = 49,88 g Ansatz für Exponentialfunktion $f(t) = 49,88\cdot e^{-kt}$ $49,88\cdot e^{-k\cdot 360} = 0,5\cdot 49,88$ $\Rightarrow k = \ln(0,5)/(-360) = 0,00193$ $\Rightarrow f(t) = 49,88\cdot e^{-0,00193t}$ $f(t) < 10^{-3} \Rightarrow t = 5605$ also ist nach 93,4 Std., d. h. nach 3 Tagen und gut 21 Stunden, die Nachweisgrenze unterschritten	2	8		verständiger Umgang mit Exponentialfunktion als Beschreibung eines Zerfallsprozesses Lösung durch systematisches Probieren mit TR nur dann gleichwertig, wenn Weg planvoll und beschrieben ist
	Σ 40	**13**	**21**	**6**	