Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 11

Auswahlverfahren: siehe Hinweise

Einlese- und Auswahlzeit: 30 Minuten

Bearbeitungszeit: 180 Minuten (für die Gesamtprüfung)

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR, CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Zur Premiere eines Films bringt eine Schokoladenfirma Überraschungseier mit Filmfiguren auf den Markt. Die Firma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Filmfigur befindet.

a. Für einen Kindergeburtstag werden 20 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist.

Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang die folgende Rechnung hat: $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) der Ereignisse:
A: In keinem Ei ist eine Figur aus dem Film.
B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren aus dem Film.

b. Ein Käufer möchte unbedingt eine Filmfigur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen muss, um mit 99,9 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Filmfigur zu erhalten?

c. Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die beiden Fehler

F_1: falsches Gewicht der Schokoladenhülle und
F_2: fehlerhafte Verpackung auf.

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.

Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

d. Ein Kunde vermutet, dass die Firma mit der Werbung betrügt, d. h. in Wirklichkeit wird die Behauptung „In jedem fünften Ei … “ nicht eingehalten.
Er beauftragt ein Kontrollinstitut, dies zu untersuchen. Das Institut kauft 160 Überraschungseier.

d1. Erklären Sie, warum aus Sicht des Kunden die Behauptung nur abzulehnen ist, wenn zu wenige Figuren gefunden werden.

Das Institut entschließt sich, die Behauptung der Firma abzulehnen, wenn nicht mehr als 25 Figuren gefunden werden.

d2. Erklären Sie, was hier der Fehler 1. Art ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen.

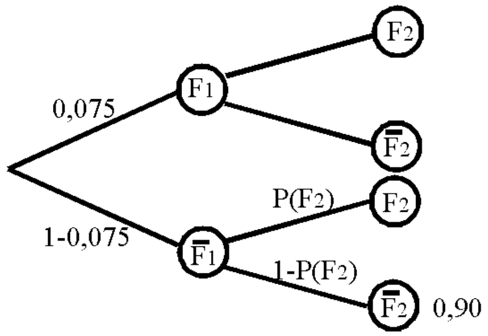
d3. Verändern Sie die Entscheidungsregel so, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art kleiner als 2,5 % ist.

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur, wenn man zufällig 20 Eier erwirbt. X ist binomialverteilt. $(n = 20; \quad p = \frac{1}{5})$ Der Term $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$ berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: „Genau zwei Eier enthalten Figuren aus dem Film“. $P(A) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20} \approx 0{,}0115$ $P(B) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 0{,}2061$	6	4		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomialverteilung, Binomialsummenfunktion
b.	$P(X \geq 1) \geq 0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}001$ $\left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}001$ $n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 4 - \ln 5}$ $n > 30{,}96$ Text: mindestens 31 Eier müssen gekauft werden, ...	2	3		Bernoullikette, Berechnung der Kettenlänge Rechnung mit Gleichheit möglich Lösung durch Probieren möglich, ein Punkt Abzug

c.	 Aus einem Baumdiagramm ergibt sich: $P(\text{"Ei ist einwandfrei"}) = 0{,}9 = P(\overline{F}_1)\cdot P(\overline{F}_2) \Leftrightarrow$ $0{,}9 = (1-0{,}075)\cdot(1-P(F_2)) \Leftrightarrow$ $P(F_2) = \frac{1}{37} = 0{,}\overline{027} \approx 2{,}70\%$	2	3		Unabhängigkeit von zwei Ereignissen, Pfadregeln
d.	d1. Aus Sicht des Kunden liegt nur ein Betrug vor, wenn sich zu wenige Figuren in den Überraschungseiern befinden. Ein höherer Anteil würde (gerne) akzeptiert. Es liegt hier also ein linksseitiger Signifikanztest vor. d2. Ein Fehler 1. Art bedeutet, dass eine richtige Hypothese abgelehnt wird. Hier: Obwohl jedes 5. Ei eine Figur enthält, wird dem Hersteller Betrug vorgeworfen. Für $p = \frac{1}{5}$ (Behauptung) beschreibe die Zufallsvariable X die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur unter den 160 erworbenen Eiern. X ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = \frac{1}{5}$. Damit beträgt: $\mu = 160\cdot 1/5 = 32$ und $\sigma = \sqrt{160\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} \approx 5{,}06$ Getestet wird hier die Hypothese H_0: $p \geq 1/5$ (linksseitiger Signifikanztest) Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 25. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:				Einseitiger Hypothesentest, Fehler 1. Art Erwartungswert, Standardabweichung, σ-Umgebungen, Abschätzung des Fehlers 1. Art

	$P(X \le 25) = \sum_{k=0}^{25} \binom{160}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{160-k} \approx 0{,}0969$ $P(X \le 25) \approx 9{,}69\%$ Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art beträgt hier 9,69 %. d3. $P(X \le g) = \sum_{k=0}^{g} \binom{160}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{160-k} < 0{,}025$ $P(X \le 22) \approx 2{,}64\%$ $P(X \le 21) \approx 1{,}56\%$ Neue Entscheidungsregel: Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 21 Der Fehler 1. Art beträgt dann höchstens 1,56 %.	2	5	3	Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für g kleiner als 25 bis das Kriterium erfüllt ist
	Σ 30	**12**	**15**	**3**	