Hessisches Kultusministerium

HESSEN

# Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

# Mathematik

## Grundkurs

## Beispielaufgabe A 10

**Auswahlverfahren:** **siehe Hinweise**

**Einlese- und Auswahlzeit:** **30 Minuten**

**Bearbeitungszeit:** **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

| | |
|---|---|
| **Erlaubte Hilfsmittel:** | **Übliche Formelsammlung**<br>**Tabellen zur Binomialverteilung**<br>**TR, GTR, CAS** |
| **Sonstige Hinweise:** | **keine** |

# I. Thema und Aufgabenstellung

## Stochastik

Eine Bierbrauerei stellt sich beim Verkauf von Flaschenbier vollständig um. Der bisher übliche Kronkorken wird durch einen Bügelverschluss ersetzt. Leider ergeben sich bei der Produktion Probleme mit der neuen Verschlusstechnik. Nicht alle Flaschen sind absolut luftdicht verschlossen.

a. In einem Getränkehandel steht ein Kasten mit 20 Flaschen Bier, von denen sechs Flaschen nicht korrekt verschlossen sind. Ein Kunde entnimmt dem Kasten drei Flaschen. Stellen Sie den Vorgang in einem Baumdiagramm dar. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei Flaschen undicht?

b. Ein Kunde entnimmt dem Kasten fünf Flaschen Bier. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle fünf Flaschen nicht richtig verschlossen?

Es zeigt sich, dass ungefähr 5 % aller abgefüllten Flaschen nicht vollständig luftdicht verschlossen sind. Aus diesem Grund werden verschlossene Flaschen vom Förderband genommen und einem Dichtheitstest unterzogen.

c. Bei einer Kontrolle werden 20 Flaschen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   - c1. keine der Flaschen undicht ist.
   - c2. höchstens drei Flaschen fehlerhaft sind.
   - c3. zwei bis fünf Flaschen (einschließlich) als Ausschuss betrachtet werden müssen.

d. Stündlich werden 100 Flaschen kontrolliert. Steigt der Anteil der undichten Flaschen, so muss der Produktionsprozess gestoppt werden, um entsprechende Korrekturen an den Maschinen vornehmen zu können.

   Die Produktion soll angehalten werden, wenn mehr als 7 undichte Flaschen entdeckt werden. Beurteilen Sie diese Entscheidungsregel anhand eines Hypothesentests und beschreiben Sie, welche Fehler man bei dieser Entscheidung begehen kann.

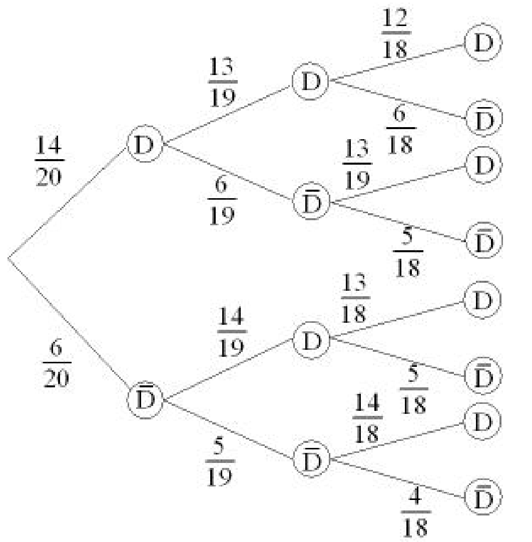
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Vermehrung des Ausschusses unentdeckt bleibt, obwohl sich die Wahrscheinlichkeit für eine undichte Flasche tatsächlich verdoppelt hat?

**Korrektur- und Bewertungshinweise**
**- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -**

## II. Erläuterungen

**Zielsetzung**
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Zufall, Messen und Modellieren. Sowohl ein Baumdiagramm als auch einfache kombinatorische Überlegungen werden gefordert. Darstellungsformen und Methoden aus dem Themenfeld Binomialverteilung und Hypothesentest müssen angewendet und in einem Sachkontext interpretiert werden. Die Aufgabe erfordert die Erläuterung des mathematischen Modells bezüglich möglicher Entscheidungsfehler.

## III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

| | **Erwartete Lösungen** | **I** | **II** | **III** | **Bemerkungen** |
|---|---|---|---|---|---|
| a. | <br>$P_{(E)} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{20\cdot 19\cdot 18} + 3\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 14}{20\cdot 19\cdot 18} \approx 0{,}2018$ | 5 | 3 | | Baumdiagramm.<br>Ziehen ohne Zurücklegen<br>Produktregel.<br>Summenregel. |
| b. | $P(x=5) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}04\%$ | 1 | 2 | | Kombinatorik.<br>Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| c. | Binomialverteilung mit n = 20 und p = 0,05.<br><br>c1. $B(x = 0) = (1 - 0{,}05)^{20} = 0{,}3585$<br>c2. $B(x \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^{k} \cdot 0{,}95^{20-k} = 0{,}9841$<br>c3. $B(3 \le x \le 6) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^{k} \cdot 0{,}95^{20-k}$<br>$- \sum_{k=0}^{1} \binom{20}{k} \cdot 0{,}05^{k} \cdot 0{,}95^{20-k} = 0{,}2639$ | 6 | 2 | | Bernoullikette. Binomial-verteilung.<br><br>Binomialsummenfunktion.<br>Arbeiten mit Tabellen. |
| d. | Fehler 1. Art:<br>α =P(„mehr als 7 Flaschen undicht“)<br>$= 1 - P(x \le g) = 1 - P(x \le 7) = 1 - 0{,}8720 = 0{,}128$<br><br>Die Wahrscheinlichkeit, sich hierbei zu irren, liegt bei 12,8 %. Diese Wahrscheinlichkeit erscheint zu groß. In der Regel wird mit einem Signifikanzniveau von 5 % oder sogar weniger gerechnet. Es empfiehlt sich, die Grenze zu erhöhen. Allerdings vermindert sich der Fehler 2. Art, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art steigt.<br><br>Der Fehler 1. Art besteht darin, den Prozess zu stoppen, obwohl kein Grund dazu besteht. Dieser Fehler hat keine Auswirkung auf die Qualität der ausgelieferten Ware.<br>Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die Produktion weiterläuft, obwohl zu viele Flaschen undicht sind..<br><br>Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 9 undichte Flaschen entdeckt werden, wenn p = 0,1 beträgt (Fehler 2. Art).<br>β =P(„max. 9 Flaschen undicht“) = $P(x \le 9) = 0{,}4513$<br>Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 45 % wird der vermehrte Anteil an undichten Flaschen nicht entdeckt, obwohl sich die Quote verdoppelt hat. | | 7 | 4 | Einseitiger Hypothesentest. Berechnung des Fehlers 1. Art.<br><br>Beurteilung des Rechener-gebnisses..<br><br>Erläuterung des Fehlers 1. Art und 2. Art.<br><br>Berechnung des Fehlers 2. Art. |
| | **Σ 30** | **12** | **14** | **4** | |