Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 4

Auswahlverfahren: siehe Hinweise

Einlese- und Auswahlzeit: 30 Minuten

Bearbeitungszeit: 180 Minuten (für die Gesamtprüfung)

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Ein Naturschutzgebiet hat in idealisierter Weise den dargestellten Küstenverlauf.
Im Scheitel der Bucht zwischen den zwei Kaps – diese entsprechen den Punkten C und D - befindet sich ein Hafen (Punkt B).
Zur näherungsweisen Beschreibung des Gebietes wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, dass der Punkt A im Nullpunkt liegt und die x-Achse das Naturschutzgebiet begrenzt.
Die Koordinaten der Punkte B und C sind gegeben: B=(1|2) und C=(2|4).
Eine Einheit soll 10 km in der Realität entsprechen.

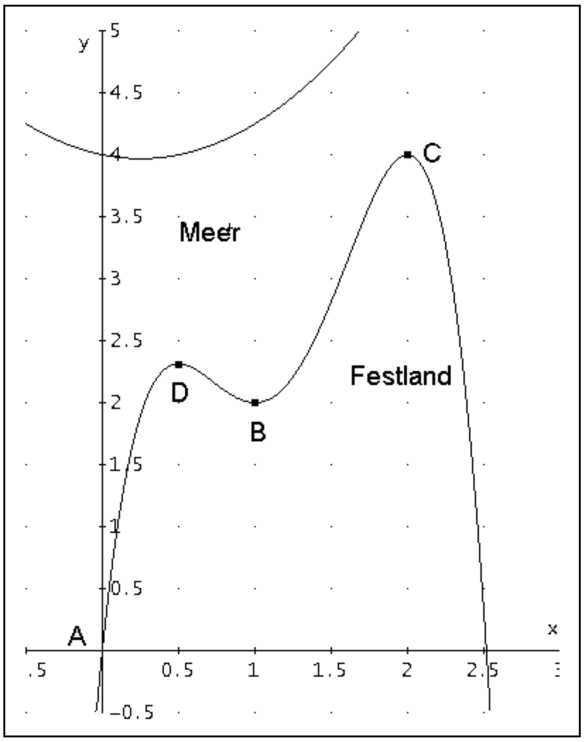


Abb. 1

a. Bestimmen Sie mit Hilfe der Punkte A, B und C eine geeignete Polynomfunktion 4. Grades, die den Küstenverlauf beschreibt. Begründen Sie diesen Ansatz sowie die verwendeten Bedingungen.

b. Zwischen den Spitzen der beiden Kaps C und D soll eine Richtfunkstrecke eingerichtet werden. Verwenden Sie für den Küstenverlauf die Funktion f mit $f(x)=-3x^4+14x^3-21x^2+12x$ und berechnen Sie die Entfernung zwischen C und D.

c. Vom Hafen B startet ein Ausflugsboot zum *nächstgelegenen* Punkt der gegenüberliegenden Küste. Diese Küstenlinie wird beschrieben durch die Funktion $k(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 4$.
Berechnen Sie die Länge der Fahrtstrecke.

d. Bestimmen Sie den Kurs (Winkel zur Nordrichtung) den das Boot einschlagen muss, um von B zum Punkt P=(0,5|4) zu gelangen.

e. Aus historischen Landkarten geht hervor, dass in früheren Jahrhunderten die Küstenlinie einen anderen Verlauf hatte. Diese alte Küstenlinie ging durch B und C und lässt sich durch eine Funktion g mit $g(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1$ mit $x \geq 0$ beschreiben.
Berechnen Sie den Landgewinn, der durch die Veränderung des Meeresspiegels entstanden ist, für das Gebiet zwischen A und C und begründen Sie Ihr Vorgehen.

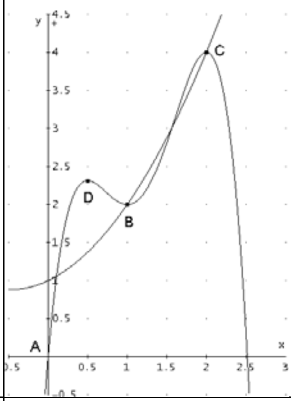
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Modellierung von Sachverhalten – Auswertung von Informationen – Darstellung und Erläuterung mathematischer Verfahren – Vernetzung von Teilgebieten (Analysis und Geometrie)
Die Aufgabe kann mit einem GTR oder CAS bearbeitet werden. Der Schwierigkeitsgrad ist in beiden Fällen vergleichbar.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan, Bemerkungen**
a.	Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, d.h. es sind 5 Bedingungen notwendig: $f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f'(1)=0,\ f'(2)=0$ Das LGS kann mit SOLVE (CAS) oder mit der erweiterten Koeffizientenmatrix gelöst werden. Begründung: 3 Extrema, also Grad 4, Bedingungen formulieren.	6	5		Aufstellen eines Funktionsterms aus vorgegebenen Bedingungen. Lösen eines linearen Gleichungssystems.
b.	D wird als rel. Maximum von f bestimmt: (0,5|2,3125) bzw. $(0.5\|\frac{37}{16})$. $\|CD\| = \sqrt{(2-0.5)^2+(4-\frac{37}{16})^2} \approx 2{,}2578$, also 22,578km	3	2		Die Berechnung der Streckenlänge erfordert eine Abstandsbestimmung (Analyt. Geometrie oder Satz des Pythagoras).
c.	Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten: Minimierung der Abstandsfunktion: $ab(x)=\sqrt{(1-x)^2+(2-k(x))^2}$. Das Minimum kann algebraisch über die Ableitungsfunktion oder grafisch/numerisch gefunden werden: x=0,5 und k(0,5)=4 als Koordinaten von P.	2	3	4	Verallgemeinerung des Abstandsbegriffes. Die Bearbeitung der Wurzelfunktion mit Rechner stellt keine Schwierigkeit dar. Minimierung der Abstandsfunktion mit algebraischer oder numerischer Lösung.
d.	Der gesuchte Winkel kann als Tangens im rechtwinkligen Dreieck oder mit der Kosinus-Formel berechnet werden. Lösung: 14,04°.	5			Die Winkelberechnung kann elementargeometrisch oder über die Kosinus-Formel (Analyt. Geometrie) erfolgen.

e.	$\int_0^2 (f(x) - g(x))dx \approx 0{,}4667$, also beträgt der Landgewinn ca. 46,7km^2 .  Begründung: Da nach dem Land*gewinn* gefragt ist, kann das Integral von 0 bis 2 berechnet werden. Für die Bereiche des Landverlusts ergeben sich Flächeninhalte mit negativem Vorzeichen. Abb.2	3	3		Anwendung der Integralrechnung. Die Begründung erfordert Grundlagenwissen zur Flächenberechnung mithilfe von Integralen.
	∑ 40	**17**	**19**	**4**	