Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 6

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ -3x_1 & + & 9x_2 & + & tx_3 & = & 15 \end{array}$$

a. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem für $t \neq 6$ eindeutig lösbar ist.

b. Bestimmen Sie für $t = 6$ die Lösungsmenge.

c. Berechnen Sie die Schnittpunkte S_{12}, S_{13} und S_{23} der Geraden mit der Gleichung
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ mit den drei Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Die Lage bezüglich der drei Koordinatenachsen muss dabei eindeutig zu erkennen sein.

d. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte S_{13}, S_{23} und den Nullpunkt gebildet wird. Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg.

e. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die 1-2-Ebene? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

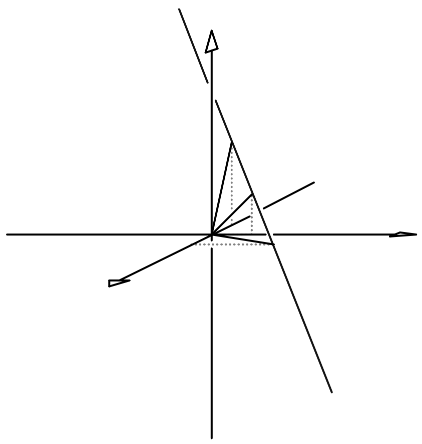
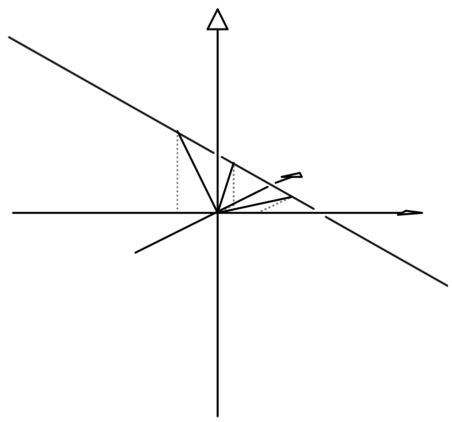
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe verlangt neben der Beherrschung grundlegender Rechenverfahren der Linearen Algebra räumliches Vorstellungsvermögen im Zusammenhang mit der Lage einer Geraden im Raum bezüglich der Ebenen eines Koordinatensystems.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	Gauß-Algorithmus $\begin{array}{rrr\|rl} 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 2 & -3 & -1 & -4 & (2)-2\cdot(1) \\ -3 & 9 & t & 15 & (3)\cdot 3\cdot(1) \\ \hline 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 3 & t-3 & 6 & (3)-3\cdot(2) \\ \hline 1 & -2 & -1 & -3 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & t-6 & 0 & \end{array}$ Eindeutig lösbar nur für $t \neq 6$. Bei $t = 6$ entsteht eine Nullzeile, also nicht eindeutig lösbar.	4	2		Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (Gauß-Algorithmus)
b.	Für t = 6: $\begin{array}{rrr\|rl} 1 & -2 & -1 & -3 & (1)+2\cdot(2) \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$ Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in R.$	2			

c.	1-2-Ebene: $x_3 = 0$ für $r = 0$, also $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1-3-Ebene: $x_2 = 0$ für $r = 2$, also $\vec{x}_{13} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2-3-Ebene: $x_1 = 0$ für $r = 1$, also $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  oder  Der räumliche Eindruck muss eindeutig zu erkennen sein.	4	5		Geometrische Interpretation von Lösungsmengen, Umgang mit Parameterdarstellung von Geraden. Lagebeziehung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum. Die Entscheidung, welche Linien vorne und welche hinten sind, erfordert eigenständige Überlegungen.

d.	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$, also $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, d. h., die drei Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck. $\left\lvert \vec{x}_{13} - \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{3}$ und $\left\lvert \vec{x}_{23} \right\rvert = \sqrt{2}$ Damit A = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}22$ Der Lösungsweg muss nachvollziehbar beschrieben werden.		8		Skalarprodukt, Länge eines Vektors und Orthogonalität
e.	Senkrechte Projektion der Geraden in die 1-2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, s \in R$ Gesucht: Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}816$ $\alpha \approx 35{,}3°$			5	Winkel zwischen Vektoren Die Berechnung eines Schnittwinkels zwischen einer Geraden und einer Ebene im Raum ist im Lehrplan nicht verbindlich vorgeschrieben. Hier sind eigene Überlegungen notwendig.
	Σ 30	**10**	**15**	**5**	