Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 9

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung, Tabellen der Binomialverteilung, Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

Zur Premiere eines Films bringt eine Schokoladenfirma Überraschungseier mit Filmfiguren auf den Markt. Die Firma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Filmfigur befindet.

a. Für einen Kindergeburtstag werden 20 Überraschungseier gekauft, wobei man davon ausgehen kann, dass die Verteilung der Figuren zufällig ist.

Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang die folgende Rechnung hat: $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) der Ereignisse:
A: In keinem Ei ist eine Figur aus dem Film.
B: Es befinden sich in höchstens 2 Eiern Figuren aus dem Film.

b. Ein Käufer möchte unbedingt eine Filmfigur bekommen. Berechnen Sie, wie viele Überraschungseier er mindestens kaufen muss, um mit 99,9 %iger Sicherheit mindestens ein Überraschungsei mit einer Filmfigur zu erhalten?

c. Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur die beiden Fehler

F_1: falsches Gewicht der Schokoladenhülle und
F_2: fehlerhafte Verpackung auf.

F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.

Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

d. Ein Kunde vermutet, dass die Firma mit der Werbung betrügt, d. h. in Wirklichkeit wird die Behauptung „In jedem fünften Ei … “ nicht eingehalten.
Er beauftragt ein Kontrollinstitut, dies zu untersuchen. Das Institut kauft 100 Überraschungseier.

d1. Erklären Sie, warum aus Sicht des Kunden die Behauptung nur abzulehnen ist, wenn zu wenige Figuren gefunden werden.

Das Institut entschließt sich, die Behauptung der Firma abzulehnen, wenn bei 100 gekauften Überraschungseiern höchstens 11 Figuren gefunden werden.

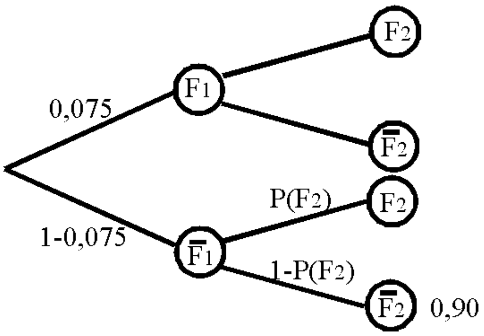
d2. Erklären Sie, was hier ein Fehler 1. Art ist und begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art hier kleiner als 2,5 % ist.

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen / IV. Bewertung und Beurteilung

III. Lösungshinweise

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur, wenn man zufällig 20 Eier erwirbt. X ist binomialverteilt. $(n = 20; \quad p = \frac{1}{5})$ Der Term $\binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \approx 0{,}13691$ berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: „Genau zwei Eier enthalten Figuren aus dem Film“. $P(A) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20} \approx 0{,}0115$ $P(B) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 0{,}2061$	6	4		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomialverteilung, Binomialsummenfunktion
b.	$P(X \geq 1) \geq 0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}001$ $\left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}001$ $n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 4 - \ln 5}$ $n > 30{,}96$ Text: mindestens 31 Eier müssen gekauft werden, ...	2	3		Bernoullikette, Berechnung der Kettenlänge Rechnung mit Gleichheit möglich Lösung durch Probieren möglich, ein Punkt Abzug

<table>
<tr>
<td>c.</td>
<td>

Aus einem Baumdiagramm ergibt sich:
$P(\text{"}Ei\ ist\ einwandfrei\text{"}) = 0{,}9 = P(\overline{F}_1)\cdot P(\overline{F}_2) \Leftrightarrow$
$0{,}9 = (1-0{,}075)\cdot(1-P(F_2)) \Leftrightarrow$
$P(F_2) = \frac{1}{37} = 0{,}\overline{027} \approx 2{,}70\%$</td>
<td>2</td>
<td>3</td>
<td></td>
<td>Unabhängigkeit von zwei Ereignissen, Pfadregeln</td>
</tr>
<tr>
<td>d.</td>
<td>d1.
Aus Sicht des Kunden liegt nur ein Betrug vor, wenn sich zu wenige Figuren in den Überraschungseiern befinden. Ein höherer Anteil würde (gerne) akzeptiert. Es liegt hier also ein linksseitiger Signifikanztest vor.

d2.
Ein Fehler 1. Art bedeutet, dass eine richtige Hypothese abgelehnt wird.
Hier: Obwohl jedes 5. Ei eine Figur enthält, wird dem Hersteller Betrug vorgeworfen.

Für $p = \frac{1}{5}$ (Behauptung) beschreibe die Zufallsvariable X die Anzahl der Überraschungseier mit einer Filmfigur unter den 100 erworbenen Eiern. X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{5}$.

Damit beträgt:
$\mu = 100\cdot 1/5 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} = 4$
Getestet wird hier die Hypothese H_0: $p \geq 1/5$
(linksseitiger Signifikanztest)
Entscheidungsregel des Instituts:

Verwirf $H_0 \Leftrightarrow$ Testergebnis ≤ 11.

Der Ablehnungsbereich liegt außerhalb der 2σ-Umgebung um den Erwartungswert, weil
$11 < \mu - 2\sigma = 20-8 = 12$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Einseitiger Hypothesentest,

Fehler 1. Art

Erwartungswert, Standardabweichung, σ-Umgebungen,</td>
</tr>
</table>

	Da die Wahrscheinlichkeit für alle Ergebnisse innerhalb der 2σ-Umgebung ca. 95,5 % beträgt, ergibt die Wahrscheinlichkeit für Ergebnisse außerhalb dieser Umgebung nur ca. 4,5 %. Das Ereignis $X \leq 11$ (auf der linken Seite) hat also eine Wahrscheinlichkeit von maximal 2,25 % (<2,5 %).	2	5	3	Neben der Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der Tabelle ist auch (wie hier beschrieben) eine Abschätzung des Fehlers 1. Art über σ-Umgebungen möglich
	Σ 30	**12**	**15**	**3**	