Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 2

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Taschenrechner** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

a. Der Graph einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, geht durch den Ursprung und den Punkt P = (2 | 0) und schließt im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche von 16 Flächeneinheiten ein.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

b. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3{,}75\, x^4 + 15\, x^2$.
Beschreiben und begründen Sie den Verlauf dieses Graphen zunächst ohne Rechnung allein mithilfe des Funktionsterms.
Bestätigen Sie die charakteristischen Punkte des Graphen durch Rechnung.

c. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn das im ersten Quadranten zwischen Funktionsgraph und x-Achse eingeschlossene Flächenstück um die x-Achse rotiert.

d. Beschreiben und erklären Sie, was in den Schritten 1 bis 5 im Text 1 berechnet wird – zu rechnen brauchen Sie selbst nicht!
Welche Eigenschaften hat der so berechnete Rotationskörper?

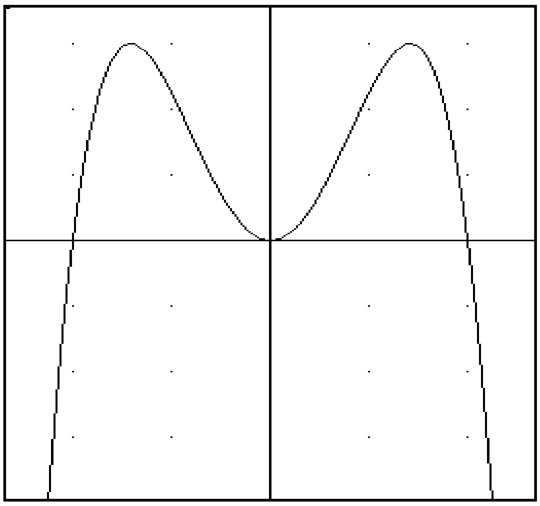

Abbildung 1

Zwischenschritte einer Rechnung

Man will einen Rotationskörper mit einer bestimmten Eigenschaft erzeugen.
Zur Vorbereitung rechnet man wie folgt:

1. $V(k) = \pi \int_k^{k+1} [f(x)]^2\, dx$, $0 \le k \le 1$
2. $V'(k) = 0 \;\Rightarrow\; k \approx 0{,}82$
3. $V''(0{,}82) \approx -2763$
4. $V(0{,}82) \approx 518{,}25$
5. $A = \pi\, [f(0{,}82)]^2 \approx 223{,}65$

Text 1

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung

Die Aufgabe testet – im Wesentlichen in traditioneller Fragestellung – Kenntnisse der Zusammenhänge von Term und Graph einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades.
Vor der Funktionsuntersuchung muss der Funktionsterm aufgestellt werden, wobei eine der dazu notwendigen Bedingungen sich aus der Bestimmung eines Flächeninhalts ergibt. Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers sowie das Beschreiben und Erkennen eines Extremwertproblems bilden den weiteren Teil der Aufgabe.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	Ansatz (wegen Symmetrie): $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$ Bedingungen $p(0) = 0$ und $p(2) = 0$ führen zu Gleichungssystem und zu einparametriger Schar $f(x) = ax^4 – 4ax^2$ mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und $x = –2$ Integral liefert $a = –3{,}75 \Rightarrow f(x) = –3{,}75x^4 + 15x^2$ (auch Ansatz mit 5 Parametern über $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ möglich)	3	4	3	LP 12/1, 11/2 Bestimmung des Terms einer ganz-rationalen Funktion 4. Grades – wegen Achsensymmetrie nur drei Bedingungen nötig
b.	Beschreibung mit Begründung nur gerade Potenzen von $x \Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse Grad 4, Koeff. $a = –3{,}75 < 0 \Rightarrow$ Verlauf für $\|x\| \to \pm\infty$ für betragsgroße x geht f(x) gegen $-\infty$ fehlendes absolutes Glied $\Rightarrow$ y-Achsenschnittpunkt $y = 0$ (Extrempunkt im Ursprung (dopp. Nullst.)) Anzahl von Null- und Extremstellen), **Rechnung** Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelte), $x = –2$, $x = 2$ Extrempunkte: notwendig $f'(x) = –15x^3 + 30x = 0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2},\ x= -\sqrt{2}$ hinreichende Bedingung ergibt $T = (0 \mid 0)$ ist Tiefpunkt $H_1 \approx (1{,}4 \mid 15)$, $H_2 \approx (-1{,}4 \mid 15)$ sind Hochpunkte Wendepunkte: notw. $f''(x) = –45x^2 + 30 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ hinr. Bedingung zeigt $W_1 \approx (0{,}8 \mid 8{,}3)$, $W_2 \approx (–0{,}8 \mid 8{,}3)$ sind Wendep.	11	7		Beschreibung und Begründung über Grad des Polynoms, auftretende Exponenten und Koeffizient vor x^4 (LP 11)

c.	$V = \pi \int\limits_0^2 [f(x)]^2 \approx 574{,}46$		6		Bestimmtes Integral Volumenintegral
d.	1. Integral in den Grenzen von k bis k+1 zur Berechnung des Volumens als Funktion in Abhängigkeit von k für k zwischen 0 und 1 2. Nach Bestimmung der ersten Ableitung V' von V wird Gleichung V'(k) = 0 gelöst, man erhält eine mögliche Extremstelle von V, die bei 0,82 liegt 3. Berechnung von V''(0,82), k ist also Extremstelle, es liegt ein Maximum vor, da V''(0,82) < 0 4. Berechnung des Volumens V für k=0,82 5. Berechnung der Standfläche des Körpers Man hat also den Körper mit Höhe 1 berechnet, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht und der unter all diesen Körpern ein maximales Volumen besitzt. Sein Volumen beträgt rund 518 Raumeinheiten, seine Grundfläche rund 224 Flächeneinheiten.		3	3	Volumenintegral, Integralbegriff in Anwendungszusammenhängen Erkennen der 5 angegebenen Rechenschritte bzw. Ergebnisse und ihre Interpretation Interpretation der kompletten Rechnung als Extremwertproblem
	Σ 40	**14**	**20**	**6**	