Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 3

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **180 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**GTR** **Übliche Formelsammlung**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Die Sinusfunktion sin(x) soll im Intervall $[0, \pi]$ durch zwei unterschiedliche quadratische Funktionen f und g angenähert werden.
Die Funktionen f und g sollen dieselben Nullstellen besitzen wie die Sinusfunktion.
Zusätzlich sollen die Funktionen die folgenden Eigenschaften haben:

- f besitzt dasselbe Maximum wie die Sinusfunktion.
- g besitzt in den Nullstellen dieselbe Steigung wie die Sinusfunktion.

Aufgaben

a. Bestimmen Sie die Funktionsterme von f und g.

b. Beurteilen Sie begründet für jede der Funktionen f und g die Güte der Annäherung an die Sinusfunktion, beziehen Sie Flächenuntersuchungen ein.

c. Betrachten Sie die Funktionsterme

$$t_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x \text{ und } t_7(x) = -\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

(*Hinweis: n! = 1·2·3·.....·n*)

Zeichnen Sie die Graphen von t_5 und t_7 und der Sinusfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem und beschreiben Sie deren Verlauf.

Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang dieser Funktionsterme mit der Sinusfunktion auf.

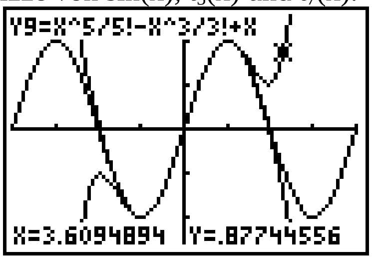
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Im Mittelpunkt der Aufgabe steht die Herleitung und Beurteilung unterschiedlicher quadratischer Funktionen, die geeignet sind den Verlauf des Sinusgraphen im Intervall 0 bis π näherungsweise wiederzugeben und die dabei bestimmten Bedingungen genügen (innermathematische Modellierung). Sowohl für den jeweiligen Ansatz zur Bestimmung der Funktionen als auch für die Beurteilung der "Passungsgüte" sind verschiedene Lösungswege möglich.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a.	Bedingungen: $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, $f(\pi/2)=1$, $f'(\pi/2)=0$ mögliche Ansätze: $f(x) = a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ oder $f(x) = a (x-\pi/2)^2 + 1$ Lösung: $f(x)= -4/\pi^2 (x -\pi/2)^2 +1$	5	6		Es werden einfache Funktionstypen behandelt, deren Verhalten z. T. schon aus dem Mittelstufenunterricht vertraut ist. Je nach gewähltem Ansatz sind einige der Bedingungen zur Bestimmung der Parameter nicht mehr notwendig. Alternativ kann auch bei beiden Funktionen mit dem Ansatz: $f(x) = a\cdot x^2 - a\cdot\pi\cdot x$ weiter gearbeitet werden.
	Bedingungen: $g(0)=0$, $g(\pi)=0$, $g'(0)=\cos(0)$,$g'(\pi)=\cos(\pi)$ $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x +c$ oder $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x$ Lösung: $g(x)=-1/\pi\cdot x^2 +x$	5	6		Lösung eines linearen Gleichungssystems.
b.	Auswahl eines geeigneten Beurteilungskriteriums: Vergleich durch Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse oder des Integrals $\int_0^{\pi} (s(x) - f(x))^2 dx$ Entscheidung : f(x) passt besser.	3	3	4	Visuelle Betrachtung der Graphen allein reicht nicht aus. Falls Differenzen oder prozentuale Abweichungen der Funktionswerte an verschiedenen Stellen betrachtet werden, sollten Teilpunkte gegeben werden.

c.	Skizze von sin(x), $t_5(x)$ und $t_7(x)$.  Die Funktionen nähern die Sinusfunktion in der Umgebung des Nullpunktes an, t_7 besser als t_5 , Vermutung : zusätzliche Terme $\frac{x^9}{9!}, \frac{x^{11}}{11!}$ verbessern die Annäherung.	3	4	1	Interpretation von Graphen, die Behandlung von Taylorreihen wird nicht vorausgesetzt.
	$\sum$ 40	**16**	**19**	**5**	