Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Hessisches Kultusministerium

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 2

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

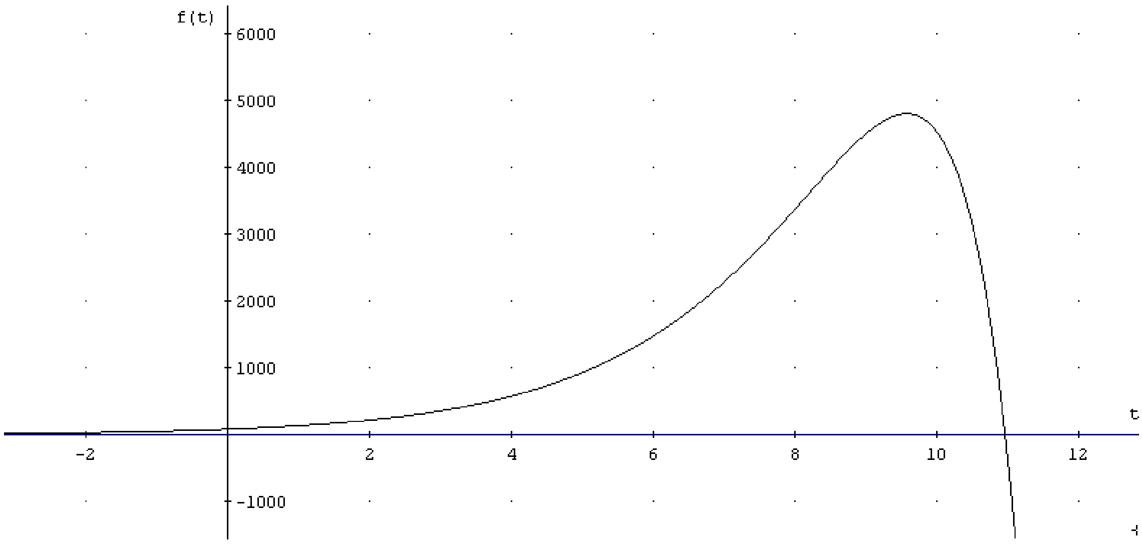
Aufgaben

Zu jedem $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(t) = 80e^{k\cdot t} - \tfrac{1}{3}e^{2k\cdot t} = 80e^{k\cdot t} - \tfrac{1}{3}(e^{k\cdot t})^2\,;\ t \in R$$

a. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der t-Achse, die Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie die Asymptoten des Graphen von f_k.

b. Begründen Sie, dass der folgende Graph zu $f_{0,5}$ gehört.



c. Die t-Achse und der Graph von f_k begrenzen eine bis „ins Unendliche reichende“ Fläche. Berechnen Sie die Gleichung der zur t-Achse senkrechten Geraden g, die diese Fläche in zwei Teilflächen einteilt, sodass der Inhalt der linken Teilfläche dreimal so groß ist wie der Inhalt der rechten Teilfläche.

d. Der Graph von $f_{0,5}$ (siehe Aufgabenteil b) zeigt den Verlauf einer Schädlingspopulation in einem Wald während der Bekämpfung mit einem Pestizid, beginnend bei $t_1 = 0$ und endend zu der Zeit t_2, ab der keine Schädlinge im Wald mehr vorhanden sind. Dabei gilt Folgendes:

1 Einheit der Funktionswerte $\hat{=}$ 1000 Schädlinge
1 Einheit der t-Werte $\hat{=}$ 1 Tag

d1. Beschreiben Sie kurz den Verlauf der Population in dem Intervall [t_1 ; t_2]. Gehen Sie dabei auf die Größe und auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Schädlingspopulation ein.

d2. 18 Stunden bevor die Population am stärksten wuchs, wurde das Pestizid über dem Wald versprüht. Bestimmen Sie den Zeitpunkt und die Anzahl der Schädlinge zu diesem Zeitpunkt.

d3. Jeder Schädling vertilgt pro Tag 3 cm^2 Blattfläche. Wie viel Blattfläche wurde von den Schädlingen insgesamt gefressen?

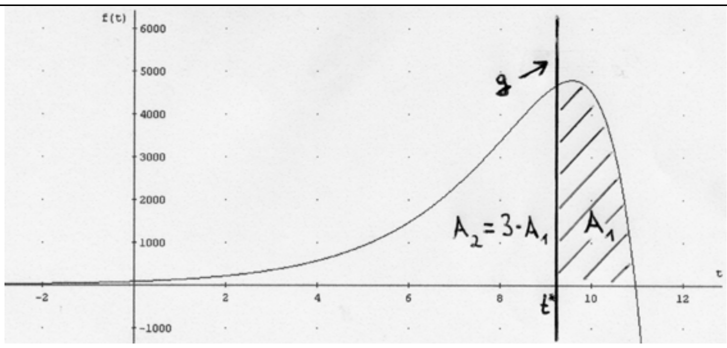
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabenteile a und b gehen auf die klassischen Untersuchungsmethoden für Funktionen am Beispiel einer Schar von Exponentialfunktionen ein.
Aufgabenteil c beinhaltet ein komplexeres Flächeninhaltsproblem, was eine strukturierte Lösungsstrategie erfordert. Neben den üblichen Integrationsmethoden werden vor allem Fertigkeiten im Umgang mit Exponentialgleichungen benötigt.
Im Aufgabenteil d wird eine Modellierung eines Anwendungsbeispiels (Beschreibung eines Populationswachstums) aufgegriffen. Dabei geht es im Wesentlichen um die Grundvorstellung der Ableitung als momentane Änderungsgröße und um die des Integrals als verallgemeinertes Größenprodukt.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	- Schnittpunkte mit der t-Achse: (Bed.: f(t) = 0), Nullstellen bei $t_k = \frac{\ln(240)}{k}$ → $N_k(\frac{\ln(240)}{k}\|0)$ - Ableitungen: $f_k'(t) = 80k \cdot e^{k\cdot t} - \frac{2}{3}k \cdot e^{2k\cdot t} = k \cdot e^{k\cdot t}(80 - \frac{2}{3}e^{k\cdot t})$ $f_k''(t) = 80k^2 \cdot e^{k\cdot t} - \frac{4}{3}k^2 \cdot e^{2k\cdot t} = k^2 \cdot e^{k\cdot t}(80 - \frac{4}{3}e^{k\cdot t})$ $f_k'''(t) = 80k^3 \cdot e^{k\cdot t} - \frac{8}{3}k^3 \cdot e^{2k\cdot t}$ - Extrempunkte: Notwendige Bed. für Extrempunkte: $f_k'(t) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{\ln(120)}{k}$ Hinreichende Bed. führt auf: $H_k(\frac{\ln(120)}{k}, 4800)$ - Wendepunkte: Notwendige Bed. für Wendepunkte: $f_k''(t) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{\ln(60)}{k}$ Hinreichende Bed. führt auf: $W_k(\frac{\ln(60)}{k}, 3600)$ - Asymptoten: $\lim\limits_{t\to+\infty} f_k(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f_k(t) = 0$ → Die t-Achse ist Asymptote für $t \to -\infty$. Für $t \to +\infty$ besitzt f_k keine Asymptote.	7	7		Klassische Methoden der Funktionsuntersuchung Wird die Berechnung mit einem konkreten Wert für k durchgeführt, sind Teilpunkte zu geben

b.	Die wesentlichen Eigenschaften sollen hier für k = 0,5 mithilfe von Teil a für die Begründung des Graphen herangezogen werden.	2	2		Der Graph bestätigt die in a gewonnenen Ergebnisse und hilft für die Umsetzung der Lösungsstrategie bei Teil c.
c.	 Strategie: 1. Bestimmung des Flächeninhalts der bis „ins Unendliche reichenden Fläche“ A_k 2. Bestimmung des Flächeninhalts der Fläche A_1 3. Bestimmung der Grenze t^* zu 1.: Ansatz: $A_k = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^{\frac{\ln(240)}{k}} f_k(t)dt$ $A_k = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^{\frac{\ln 240}{k}} f_k(t)dt = \lim\limits_{a\to-\infty} \left[\frac{80\cdot e^{k\cdot t}}{k} - \frac{e^{2k\cdot t}}{3\cdot 2k}\right]_a^{\frac{\ln 240}{k}}$ $= \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{9600}{k} - \frac{80\cdot e^{k\cdot a}}{k} + \frac{e^{2k\cdot a}}{6\cdot k}\right) = \frac{9600}{k}$ zu 2.: $A_1 = \frac{1}{4}\cdot A_k = \frac{2400}{k}$ zu 3.: Ansatz: $A_1 = \int_{t^*}^{\frac{\ln 240}{k}} f_k(t)dt = \frac{9600}{k} - \frac{80\cdot e^{k\cdot t^*}}{k} + \frac{e^{2k\cdot t^*}}{6\cdot k} = \frac{2400}{k}$ → $\underline{t_1^* = \frac{\ln(120)}{k}}$, $t_2^* = \frac{\ln(360)}{k}$ Da nur die erste Gerade die angegebene Fläche teilt, lautet die Gleichung für $\underline{g: t = \frac{\ln(120)}{k}}$	1	5	2	Die Hälfte der zu vergebenden Punktzahl sollte bei diesem Aufgabenteil auf die Erläuterung der Strategie und die Ansätze verteilt werden. Lösung durch Substitution $z = e^{k\cdot t^*}$
d. 1.	Die Populationsgröße ist zu Beginn sehr klein und nimmt bis zum Hochpunkt zu. Die Wachstumsgeschwindigkeit steigt ebenfalls, jedoch nur bis zum Wendepunkt. Ab dem Wendepunkt wird das Wachstum geringer, ehe es ab dem Hochpunkt sogar negativ wird, d. h. die Populationsgröße nimmt wieder ab. Nach ca. 11 Tagen ist sie auf Null zurückgegangen, d. h. es sind keine Schädlinge mehr vorhanden.	2	3		

d 2.	18 Stunden entsprechen einem ¾ Tag. Die Population wuchs am stärksten beim Wendepunkt. → $\hat{t} = \frac{\ln(60)}{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \approx 7{,}439$ → $f_{0,5}(\hat{t}) \approx 2732$ Das Pestizid wurde etwa nach 7 Tagen und 10,5 Stunden versprüht. Die Anzahl der Schädlinge betrug zu diesem Zeitpunkt etwa 2,73 Millionen.		2	2	
d 3.	$A = 1000 \cdot 3\,\text{cm}^2 \cdot \int_0^{\frac{\ln(240)}{\frac{1}{2}}} f_{0,5}(t)dt = 57121000\,\text{cm}^2$ Die insgesamt gefressene Blattfläche der Schädlinge betrug etwa 5700 m^2.		3	2	
	Σ 40	**12**	**22**	**6**	