Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

HESSEN

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 4

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Nach der Fällung einer 200 Jahre alten Rotbuche wurde anhand der Jahresringe der Stammdurchmesser bestimmt. Die folgende Tabelle gibt einen Auszug aus den Messdaten:

Alter in Jahren	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Durchmesser in Metern	0.05	0.26	0.40	0.85	1.05	1.20	1.23	1.24	1.26

a. Zeichnen Sie die Messpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Skizzieren Sie eine Kurve, die auch den weiteren Verlauf des Durchmessers prognostizieren könnte, und beschreiben Sie den Wachstumsprozess in Worten.
Modellieren Sie die Entwicklung des Durchmessers während der ersten 75 Jahre als exponentielles Wachstum. In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Dicke des Baumes nach Ihrem Modell? Beurteilen Sie dieses Modell.

b. Die Funktion $d(x) = \dfrac{5}{100 \cdot e^{-0.05 \cdot x} + 4}$ für $x \in [0;200]$
ist ein weiteres Modell, um das Wachstum des Baumdurchmessers zu beschreiben.
Zu welchem Zeitpunkt hatte nach diesem Modell der Baum eine Dicke von 1 m?
Wann wächst der Baum nach diesem Modell am schnellsten und wie schnell wächst er dann?

c. Max hat ein anderes Modell gewählt:
„Eine kubische Regression führt doch zu einem wesentlich einfacheren Funktionstyp:
$n(x) = -2{,}08 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 2{,}48 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 9{,}34 \cdot 10^{-3} \cdot x + 2{,}04 \cdot 10^{-2}$,
Damit erhalte ich folgende Tabellenwerte - gerundet auf zwei Nachkommastellen – und die sind doch nicht schlechter als die Werte von Funktion d.“

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
n(x)	0.02	0.26	0.52	0.77	0.99	1.17	1.28	1.30	1.22
d(x)	0.05	0.15	0.41	0.79	1.07	1.19	1.23	1.25	1.25

Vergleichen Sie die beiden Anpassungen. Welche ist besser? Geben Sie eine quantitative und qualitative Begründung.

d. Durch Untersuchungsergebnisse an weiteren Buchen hat man festgestellt, dass sich allgemein das Wachstum der Durchmesser durch die folgende Funktion beschreiben lässt:

$$d_p(x) = \frac{5}{p \cdot e^{-0.05 \cdot x} + 4}$$

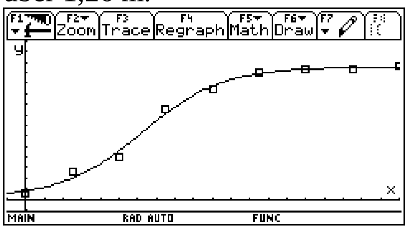
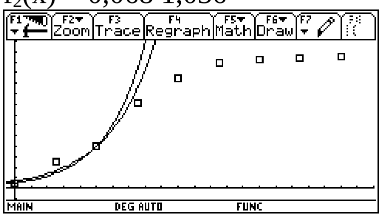
Betrachten Sie für verschiedene Werte für p den jeweiligen Graphen. Welchen Einfluss übt der Faktor p auf den Verlauf des Graphen aus? Wie verändert sich demnach das Wachstum des Baumdurchmessers in Abhängigkeit von p?

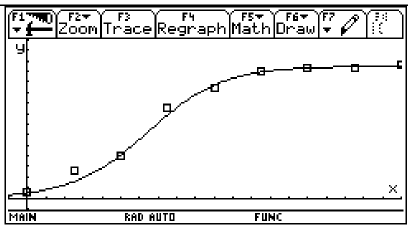
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung
Schwerpunkt ist die mathematische Modellierung eines Wachstumsprozesses. Zunächst soll das Modell eines exponentiellen Wachstums erstellt und kritisch bewertet werden. Ein zweites, verbessertes Modell erlaubt die Bearbeitung spezieller Fragestellungen. Eine qualitative und quantitative Beurteilung der Passungsgüte sowie eine Parametervariation schließen die Aufgabe ab.

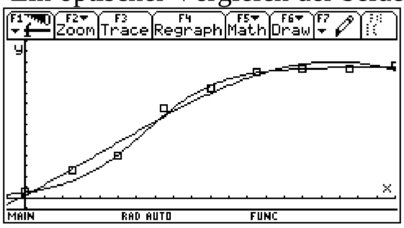
III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen**
a	Der Durchmesser wächst zunächst langsam, dann zwischen dem 50. und 100.Jahr schneller. Danach je älter der Baum wird, desto langsamer. Die maximale Dicke liegt laut den Messdaten wohl knapp über 1,26 m.  . Es sind verschiedene Ausgangswerte denkbar, z. B.: $f_1(x)=0.05\cdot(1{,}0425)^x$ (1. und 3. Punkt) **oder** Verwenden der Regressionsmoduls für Exponentialfunktionen. Man erhält bei 4 Punkten: $f_2(x) = 0{,}068\cdot 1{,}036^x$  Verdopplung des Durchmessers: Bei f_1: nach 16.6 Jahren Bei f_2: nach 11 Jahren Das Modell kann lediglich für die ersten Jahre herangezogen werden, ansonsten ist die Modellierung unrealistisch.	**7**	**5**		Neben dem Modellbildungsprozess und dessen Beurteilung werden Methoden der Differenzialrechnung eingesetzt. Hier: Grafische Darstellung und Interpretation von Daten. Die Rechnungen können mit oder ohne Rechner ausgeführt werden.

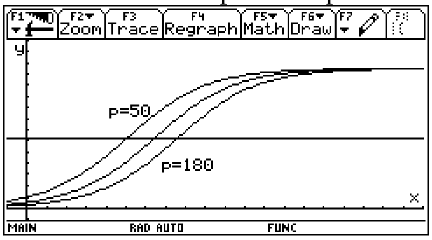
<table>
<tr><td>b</td><td>

Dies ist ein deutlich besseres Modell, was für den gesamten Zeitraum brauchbar ist.

Aus der Gleichung d(t) = 1 ergibt sich
$t \approx 92{,}103$; d. h., nach ca. 92 Jahren hat der Baum einen Durchmesser von 1 m.
Der Graph hat einen Wendepunkt bei $(40\cdot\ln(5)$ $\vert 0.625)$, demnach wächst der Baum nach ca. 64.4 Jahren am schnellsten. Die Wachstumsrate im 65. Jahr ergibt sich aus $d'(64) = 0{,}0156$, also ca.1,6 cm in diesem Jahr.</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>Eine vorangegangene Behandlung von logistischem Wachstum im Unterricht ist nicht notwendig.

Anwendung von Methoden der Differenzialrechnung, Berechnung des Wendepunktes und von Änderungsraten.</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Ein optischer Vergleich der beiden Funktionen:

Um einen quantitativen Vergleich durchführen zu können, muss ein „Gütemaß“ eingeführt werden, z. B. die Summe der Abweichungen der beiden Funktionen von den Messwerten. Dabei sind die Beträge zu wählen.
Hier wurden Abweichungsquadrate gebildet:
<table>
<tr><td>DATA</td><td>(Ab-d)^2</td><td>(Ab-n)^2</td><td>Summe</td><td>Summe</td></tr>
<tr><td></td><td>c3</td><td>c4</td><td>c5</td><td>c6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>.003946</td><td>.005981</td><td>.015461</td><td>.038402</td></tr>
<tr><td>5</td><td>.000392</td><td>.00309</td><td>.015853</td><td>.054255</td></tr>
<tr><td>6</td><td>.000057</td><td>.00095</td><td>.01591</td><td>.070165</td></tr>
<tr><td>7</td><td>.000009</td><td>.002252</td><td>.015918</td><td>.086083</td></tr>
<tr><td>8</td><td>.000026</td><td>.00357</td><td>.015944</td><td>.102027</td></tr>
<tr><td>9</td><td>.00013</td><td>.001887</td><td>.016074</td><td>.118101</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
r10c5=
Die Aufsummierung ergibt mit 0.0161für d(x) einen kleineren Wert als 0.1181 für n(x).

d(x) „passt“ demnach besser. Zudem fällt der Graph von n(x) nach 200 Jahren wieder ab. Dieses Modell passt demnach nicht für langfristige Prognosen.</td><td>3</td><td>8</td><td>3</td><td>Beurteilung der Passungsgüte</td></tr>
</table>

d	Durch p wird der Wendepunkt horizontal verschoben, Anfangswert und „Sättigungswert“ bleiben gleich. Der Faktor p beeinflusst also lediglich den Zeitpunkt, wann der Durchmesser den „Wachstumsschub“ macht. Hier z. B.: die Graphen für p=50 und p=180.  Der Parameter p könnte als „biologischer“ Faktor gedeutet werden.	**2**	**3**	**1**	Betrachtung einer Kurvenschar, Variation des Parameters und Interpretation im Aufgabenkontext.
	∑ 40	**15**	**20**	**5**	