Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 10

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **TR und Binomialverteilung, GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Stochastik

Aufgaben

a. In einer Gruppe von 30 Personen sind 10 Wählerinnen und Wähler der Partei ABC und 20 Wähler und Wählerinnen der Partei XYZ. Es werden für Interviews 5 Personen zufällig ausgewählt.

a1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nur Wählerinnen und Wähler der Partei XYZ ausgewählt?

a2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangen genau 2 Wählerinnen oder Wähler der Partei ABC in die Stichprobe? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

b. Eine zufällig ausgewählte Person aus der Bevölkerung gibt ihre Stimme mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$ der Partei ABC.

b1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 befragten Wählern mehr als 60 und weniger als 78 ihre Stimme einer anderen Partei geben?

b2. Für Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten bei großen Stichproben hat die Gaußsche φ-Funktion eine wichtige Bedeutung. Beschreiben Sie den Zusammenhang einer Binomialverteilung und der Gaußschen φ-Funktion. Bestimmen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der ABC-Wähler bei 2100 befragten Wählern mehr als 661 beträgt.

c. Die Umfrageergebnisse der Partei XYZ lagen bisher bei 54 %. Die Strategen im Wahlkampfbüro vermuten, dass nach einer Werbekampagne der Wähleranteil größer geworden ist.

Entwickeln Sie einen Hypothesentest für einen Stichprobenumfang von 150, mit dem die Vermutung des Wahlkampfbüros bei einem Signifikanzniveau von 10 % untersucht werden kann.

Erläutern Sie an diesem Beispiel die möglichen Fehler bei der Entscheidung.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn der Wähleranteil nach der Werbekampagne tatsächlich 60 % beträgt.

Welchen Einfluss hat der Stichprobenumfang auf die Größe des Fehlers 2. Art?

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	Es handelt sich um ungeordnete Stichproben. Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie viele Personen der Partei XYZ ausgewählt werden. günstige Kombinationen: 5 aus 20 mögliche Kombinationen: 5 aus 30 a1. $P(X=5)=\frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}1088=10{,}88\%$	2			Kombinatorische Zählprobleme, ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen. Auch andere Lösungswege (z. B. Baumdiagramm) sind möglich
	a2. $P(X=3)=\frac{\binom{20}{3}\binom{10}{2}}{\binom{30}{5}}\approx 0{,}3600=36{,}00\%$ Aus der Gruppe der 20 WählerInnen der Partei XYZ werden (ungeordnet) 3 Personen ausgewählt und entsprechend 2 Personen aus den 10 WählerInnen der Partei ABC, was auf $\binom{20}{3}\cdot\binom{10}{2}$ verschiedene Arten möglich ist. Entsprechend handelt es sich bei dem Term im Nenner um die Anzahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang 5 aus einer Gesamtheit von 30 Personen. Da alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind, ergibt der Quotient die gesuchte Wahrscheinlichkeit.		5		Zusätzlich Produktregel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Auch andere Lösungswege (z. B. Baumdiagramm) sind möglich
b.	Sei Y die Anzahl derer, die ihre Stimme der Partei ABC geben und X die Anzahl derer, die ihre Stimme einer anderen Partei geben. b1. CAS-Version: $P(60<X<78)=\sum_{k=61}^{77}\binom{100}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{100-k}\approx 0{,}931146$ $=93{,}1146\%$ TR-Version: $P(60<X<78)=F_{100;0,7}(77)-F_{100;0,7}(60)\approx$ $(1-0{,}0479)-(1-0{,}9790)=0{,}9311=93{,}11\%$	3	1		Zufallsgröße Bernoullikette, Binomialverteilung, Summenfunktion

	b2. Eine Binomialverteilung kann durch Verschiebung des Erwartungswertes μ an die Stelle 0, durch Stauchung in x-Richtung um den Faktor σ und gleichzeitige Streckung in y-Richtung mit dem gleichen Faktor flächengleich transformiert werden. Für genügend große Werte von n und eine Varianz von mehr als 9 wird das so entstandene Schaubild gut durch den Graphen der Gaußschen φ-Funktion genähert. $E(Y) = \mu = n \cdot p = 2100 \cdot 0{,}3 = 630$ $\sigma = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{441} = 21$ Damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(Y \geq 662) = 1 - P(Y \leq 661) \approx 1 - \Phi(\frac{661+0{,}5-\mu}{\sigma}) =$ $1 - \Phi(1{,}5) \approx 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = 6{,}68\%$	2	5		Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Normalverteilung
c.	Die Hypothese H lautet: Der Wähleranteil ist größer als 54 %. H: p>0,54 Die Nullhypothese H_0 lautet: Der Wähleranteil beträgt nach wie vor 54 %. H_0: p=0,54 Bestimmt wird der Ablehnungsbereich A für H_0 unter der Annahme, dass p=0,54 gilt. $E(X) = \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0{,}54 = 81$ $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{150 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}46} \approx 6{,}1041$ $P(X > g_r) < 0{,}1 \Leftrightarrow P(X \leq g_r - 1) > 0{,}9$ Näherung durch Gaußsche Summenfunktion: $\Phi(\frac{g_r - 1 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}) > 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{g_r - 0{,}5 - \mu}{\sigma} > 1{,}2816 \Leftrightarrow g_r > 89{,}3$ $\Rightarrow g_r \geq 90 \Rightarrow A = \{90; 91; ...; 150\}$ Bei einem Stichprobenergebnis von 90 oder mehr WählerInnen der Partei XYZ wird H_0 verworfen. Der Fehler 1. Art beträgt dabei weniger als 10 %. Wenn die Nullhypothese beibehalten wird, kann man einen Fehler 2. Art machen, nämlich dann, wenn der Wähleranteil wirklich größer geworden ist, man dies jedoch nicht erkannt hat. Die Größe des Fehlers 2. Art kann nur angegeben werden, wenn der wahre Wähleranteil p_1 bekannt ist. Fehler 2. Art bei p_1=0,60:				Entwickeln eines Hypothesentests (einseitig) Fehler beim Testen, Fehler 1. Art und Fehler 2. Art Berechnung des Fehlers 2. Art

	$E(X)=\mu=n\cdot p_1=150\cdot 0{,}60=90$ $\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\cdot p_1\cdot(1-p_1)}=\sqrt{150\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}=6$ $P(0\le X\le 89)\approx\Phi(\frac{89+0{,}5-\mu}{\sigma})=\Phi(-\frac{1}{6})=$ $1-\Phi(\frac{1}{6})\approx 1-0{,}5332=0{,}4668=46{,}68\%$ Das Risiko 2. Art beträgt bei p_1=0,60 und 90 WählerInnen der Partei XYZ in der Stichprobe 46,68 %. Der Fehler 2. Art ist sehr groß, da die Wahrscheinlichkeiten p und p_1 dicht nebeneinander liegen und der Stichprobenumfang recht klein ist. Würde man den Stichprobenumfang noch kleiner wählen, so würde die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art noch größer. Sinnvoll wäre es hier, den Stichprobenumfang deutlich zu vergrößern, damit das Risiko 2. Art wesentlich kleiner wird.	4	4	4	Einfluss der Stichprobengröße auf den Fehler 2. Art
	Σ 30	**11**	**15**	**4**	