

Hessisches Kultusministerium

HESSEN



# Landesabitur 2007

Bildungsland  
Hessen



Beispielaufgaben 2005



# Mathematik

## Leistungskurs

### Beispielaufgabe A 12

**Auswahlverfahren:** siehe Hinweise

**Einlese- und Auswahlzeit:** 30 Minuten

**Bearbeitungszeit:** 240 Minuten (für die Gesamtprüfung)

<b>Erlaubte Hilfsmittel:</b>	<b>Übliche Formelsammlung GTR oder CAS</b>
<b>Sonstige Hinweise:</b>	<b>keine</b>

## I. Thema und Aufgabenstellung

### Stochastik

#### Aufgaben

Rauchen ist das größte vermeidbare Gesundheitsrisiko unserer Zeit, über 110.000 auf das Rauchen zurückzuführende Todesfälle sind pro Jahr in Deutschland zu verzeichnen. Umso wichtiger ist es, bereits Jugendliche vom Tabakkonsum fernzuhalten.

Der Drogen- und Suchtbericht im Jahr 2004 der Drogenbeauftragten der Bundesregierung, Frau Marion Caspers-Merk, kommt zu dem Ergebnis, dass ca. 35 % aller Schüler, die eine 9. oder 10. Klasse besuchen, täglich Zigaretten rauchen. Befragt wurden mehr als 11.000 Schülerinnen und Schüler an verschiedenen Schulformen.

- a. Es werden 120 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 9/10 einer Schule befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
  - a1. höchstens 33 rauchen,
  - a2. mindestens 50 rauchen.

Begründen Sie Ihren mathematischen Ansatz.

- b. Wie viele Schülerinnen und Schüler müsste man wenigstens befragen, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Raucher zu finden, größer als 99 % ist?
- c. Bei der Prävention nehmen laut der Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung (BZgA) die Sportvereine eine wichtige Rolle ein. Als Beispiel sei die Kampagne „Kinder stark machen“ genannt, die bereits seit den 90er Jahren läuft.

In einer aktuellen Umfrage an einer Schule ist erfasst worden, wie viele Schülerinnen und Schüler der 9. und 10. Klassen regelmäßig rauchen und Mitglied in Sportvereinen sind. 43 Raucher gaben an, Mitglied in einem Sportverein zu sein, 65 Raucher hingegen zählen zu den Nichtmitgliedern. Bei den Nichtraucher waren 77 Schüler im Sportverein und wiederum 65 nicht.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse „Mitgliedschaft im Sportverein“ und „Raucher“ nicht unabhängig sind.

- d. Die BZgA ergreift verschiedene Maßnahmen zur Suchtprävention. Zum Beispiel muss eine Zigarettenpackung mittlerweile mindestens 17 Zigaretten enthalten. Durch Kleinpäckungen, bezeichnenderweise „Kiddy Packs“ genannt, sollen keine erschwinglichen Alternativen für Kinder und Jugendliche geschaffen werden. In einer anderen Kampagne wurde eine fünfteilige Anzeigenserie in Jugendzeitschriften geschaltet.

Die von der BZgA beauftragte Werbeagentur behauptet, dass die präventiven Kampagnen bereits Erfolg hatten. Die BZgA möchte dies überprüfen, sie vertritt die Hypothese, dass der Anteil der Raucher unverändert ist. Sie befragt 65 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler und will ihre eigene Hypothese verwerfen, wenn höchstens 18 Raucher angetroffen werden.

Erklären Sie, warum hier einseitig getestet wird und welche Fehler bei der Interpretation der Daten unterlaufen können.

Beurteilen Sie die Entscheidungsregel und verändern Sie den Test so, dass der Fehler 1. Art unter 5 % liegt und berechnen Sie für diesen Fall den Fehler 2. Art, wenn der Anteil der Raucher tatsächlich auf 20 % gesunken ist.

## Korrektur- und Bewertungshinweise - nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

### II. Erläuterungen

#### Zielsetzung

Die Aufgabe ist gekennzeichnet durch einen Sachverhalt, der in einem aktuellen Kontext steht. Die Modellierung dieses Sachverhaltes befindet sich im Mittelpunkt. Bei der letzten Teilaufgabe erfordern die notwendige numerische Auswertung und die Interpretation der Ergebnisse Einblick in die Komplexität des Sachverhaltes, den sicheren Umgang mit der Normalverteilung und dem Testen von Hypothesen.

### III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Schülerleistungen	I	II	III	Bemerkungen
a.	<p>a1. <math>\text{bino}(n, k, p) := \text{comb}(n, k, p) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}</math></p> $\sum_{k=0}^{33} \text{bino}(120, k, 0.35) = 0,0499$ <p>a2. <math>1 - \sum_{k=0}^{49} \text{bino}(120, k, 0.35) = 0,0768</math></p> <p>Eine Stichprobe von 120 Schülern kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden, da nur die Ergebnisse „Schüler raucht“ und „Schüler raucht nicht“ interessieren. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Raucher. Nach Aufgabenstellung raucht jeder Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von <math>p = 0,35</math>. Die Auswahl der Schüler muss zufällig erfolgen.</p>	5	1		<p>Bernoullikette. Berechnung mit der Binomialverteilung und ihrer Summenfunktion.</p> <p>Zufallsgröße. Bernoulliexperiment.</p>
b.	<p>Bestimmung der Größe über das Gegenereignis.</p> $P(x \geq 1) > 0,99$ $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - B(n; 0,35; 0) = 1 - 0,65^n$ $1 - 0,65^n > 0,99$ $n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \Rightarrow n > 10,69$ <p>Mindestens 11 Schüler sind zu befragen.</p>	3	1		<p>Ansatz über die Gegenwahrscheinlichkeit. Berechnung der Stichprobenanzahl.</p>

c.	<table><tr><td></td><td>S</td><td><math>\bar{S}</math></td><td></td></tr><tr><td>R</td><td>43</td><td>65</td><td>108</td></tr><tr><td><math>\bar{R}</math></td><td>77</td><td>65</td><td>142</td></tr><tr><td></td><td>120</td><td>130</td><td>250</td></tr></table> <div><div><div><div><div><math>\frac{108}{250}</math></div><div>R</div></div><div><div><math>\frac{43}{108}</math></div><div>S</div></div><div><div><math>\frac{65}{108}</math></div><div><math>\bar{S}</math></div></div></div><div><div><math>\frac{142}{250}</math></div><div><math>\bar{R}</math></div></div><div><div><math>\frac{77}{142}</math></div><div>S</div></div><div><div><math>\frac{65}{142}</math></div><div><math>\bar{S}</math></div></div></div></div> <p>Bild LK_ST_V2_Bild1.jpg</p> <p>Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich durch die angegebenen Häufigkeiten, die sich in einer Vierfeldertafel darstellen lassen.</p> <p>Sind die Ereignisse „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ unabhängig, so gilt: <math>P(R \cap S) = P(R) \cdot P(S)</math></p> <p>Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:</p> $P(R \cap S) = \frac{108}{250} \cdot \frac{43}{108} = 0,172$ $P(R) = \frac{108}{250} = 0,432 \quad P(S) = \frac{120}{250} = 0,48$ $P(R) \cdot P(S) = 0,432 \cdot 0,48 \approx 0,2074$ <p>Die beiden Merkmale „Rauchen“ und „Mitglied im Sportverein“ sind nicht unabhängig, da die beiden berechneten Wahrscheinlichkeiten voneinander abweichen.</p>		S	$\bar{S}$		R	43	65	108	$\bar{R}$	77	65	142		120	130	250	4	3	1	Unabhängigkeit von Ereignissen. Absolute und relative Häufigkeiten. Vierfeldertafel oder Baumdiagramm.
	S	$\bar{S}$																			
R	43	65	108																		
$\bar{R}$	77	65	142																		
	120	130	250																		
d.	<p>Es eignet sich ein einseitiger Hypothesentest, da die Vermutung <math>p &lt; 0,35</math> lautet. Die Nullhypothese wird man ablehnen, wenn die Prüfgröße sehr kleine Werte annimmt.</p> <p><math>H_0</math>: Die Anzahl der Raucher ist unverändert <math>p = 0,35</math>. <math>H_1</math>: Die Anzahl der Raucher ist gesunken <math>p &lt; 0,35</math>. Der Fehler 1. Art bedeutet, dass die BZgA die Hypothese <math>H_1</math> annimmt, obwohl <math>H_0</math> gilt, also irrtümlich einen Erfolg feiert, obwohl die Anzahl der Raucher nicht gesunken ist. Beim Fehler 2. Art wird <math>H_0</math> angenommen, obwohl die Anzahl der Raucher gesunken ist. Die BZgA bringt sich damit um ihren Erfolg.</p> <p>Unter der Annahme, dass <math>H_0</math> wahr ist, ergibt sich die Zufallsvariable <math>X</math> als <math>B(65;0,35)</math> verteilt.</p> $\sum_{k=0}^{18} \text{bino}(65, k, 0,35) = 0,1338$				Einseitiger Hypothesentest.  Aufstellen der Hypothesen.  Fehler 1. und 2. Art.    Festlegung der Zufallsgröße.  Berechnung Fehler 1. Art.																

	<p>Die Irrtumswahrscheinlichkeit erscheint sehr hoch. Die Wahrscheinlichkeit einen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt mehr als 13 %.</p> <p>Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner 5 %:</p> $\sum_{k=0}^{16} \text{bino}(65, k, 0.35) = 0,0492$ <p>Werden höchstens 16 Raucher gezählt, sollte H0 verworfen werden.</p> <p>Fehler 2. Art:</p> $1 - \sum_{k=0}^{16} \text{bino}(65, k, 0.2) = 0,1396$				Signifikanzniveau
		9	3		Berechnung Fehler 2. Art.
	<b>Σ 30</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>4</b>	