Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 1

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **Taschenrechner**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktionenschar f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x}\ ;\ x > 0$$

a. Weisen Sie nach, dass f_t Null-, Extrem- und Wendestellen besitzt. Untersuchen Sie auch das Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$ und zeichnen Sie den Graphen f_2 für $0 < x \leq 5$. (1LE $\hat{=}$ 2cm)

b. Erklären Sie, was in den Schritten 1 bis 3 im nebenstehenden Kasten berechnet wird. Was beschreibt y in Zeile 3?
Übertragen Sie die Rechnung auf den Punkt $\left(e^{1-t} \middle| e^{t-1}\right)$ der Funktionenschar $f_t(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Bestimmung einer besonderen Kurve:

Für $g_t(x) = 2x^4 + tx^3$ ist der Punkt $\left(-\frac{3}{8}t \middle| -\frac{27}{2048}t^4\right)$ Tiefpunkt .

1. $x = -\frac{3}{8}t$
2. $t = -\frac{8}{3}x$
3. $y = -\frac{27}{2048}(-\frac{8}{3}x)^4 = -\frac{2}{3}x^4$

c. Die Funktion f_t, die x-Achse und die zur y-Achse parallele Gerade durch den Hochpunkt von f_t umschließen eine endliche Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

d. Lässt man den Graphen f_2 (siehe a) im Intervall [e^{-2}, h] um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, der einer Rotweinkaraffe ähnelt.
Man kann jetzt das Volumen der Karaffe in Abhängigkeit zur Füllhöhe h berechnen.
Möchte man zu einem gegebenen Volumen V dieser „Karaffe“ die Füllhöhe h bestimmen, so gelangt man nach einigen Umformungsschritten zu folgender Gleichung:

$$z^2 + 6z + 10 = (\frac{-V}{\pi} + 14{,}78)e^z \qquad (\text{mit } z = \ln(h))$$

Diese Gleichung ist mit den herkömmlichen Mitteln algebraisch nicht lösbar. Erläutern Sie, wie man zumindest näherungsweise für z eine Lösung bestimmen könnte. Begründen Sie, dass es nicht für jeden Wert von V eine Lösung geben kann.

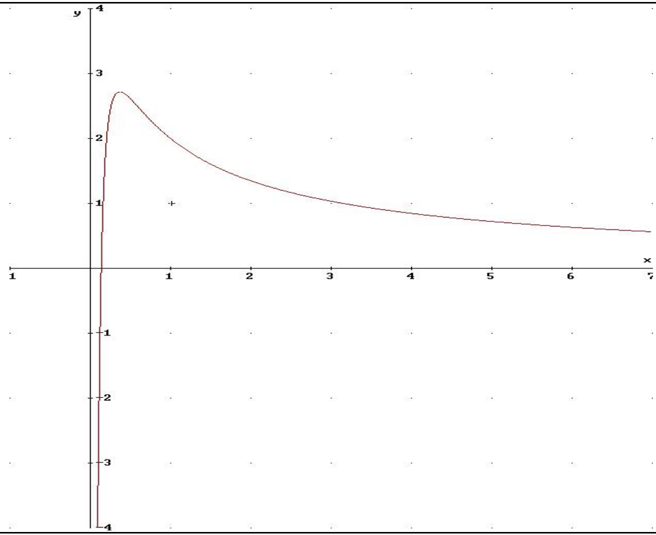
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung:
Im Wesentlichen ist diese Aufgabe an traditionellen Fragestellungen orientiert. Sie erfordert einen sicheren Umgang mit den Kalkülen der Analysis. Dabei müssen gefundene Ergebnisse interpretiert und Rechenwege erläutert werden. Da die Kenntnis des Begriffs der Ortskurve nicht vorausgesetzt werden kann, soll dies im Aufgabenteil b) zunächst an einem Beispiel erläutert und dann auf die „eigentliche“ Funktion übertragen werden. Im weiteren Verlauf der Aufgabe wird erwartet, dass man Lösungsansätze entwickelt, wenn herkömmliche Rechenroutinen nicht zum gewünschten Erfolg führen.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**I**	**II**	**III**	**Bemerkungen**
a.	Nullstellenberechnung, Bedingungen (z. B. $f(x_N)=0$) formulieren. Die entstehenden Gleichungen lösen. Extrema u. Wendepunkte: Bedingungen in Gleichungen fassen (z. B. für Extrema $f_t'(x_E)=0 \ \wedge \ f_t''(x_E)\neq 0$), entstehende Gleichungen lösen, Bedingungen überprüfen. Es gibt nur Hochpunkte und keine Tiefpunkte. Asymptoten als Grenzwert formulieren. **Ableitungen:** $f_t'(x)=\dfrac{1-t-\ln(x)}{x^2}$, $f_t''(x)=\dfrac{2\ln(x)+2t-3}{x^3}$, $f_t'''(x)=\dfrac{11-6t-6\ln(x)}{x^4}$ **Nullstelle** $N_t(e^{-t}/0)$; **Extrema** $H_t(e^{1-t}/e^{t-1})$ **Wendestellen:** $W_t(e^{\frac{3}{2}-t}/\frac{3}{2}e^{t-\frac{3}{2}})$ **Asymptoten:** Die x-Achse ist Asymptote für $x\to\infty$. Für $x\to 0$ folgt, dass die y-Achse Asymptote ist.	7	10		Standardstoff des Analysisunterrichtes, sicherer Umgang mit Kurvenscharen

					
b.	Die x-Koordinate des Tiefpunktes wird nach t aufgelöst und mit dieser Umformung der Parameter t aus der y-Koordinate eliminiert. Alle Tiefpunkte der Schar liegen daher auf dem Graphen von y aus Zeile 3 (Fachbegriff: Ortskurve). Übertragung auf das Beispiel: $x = e^{1-t} \Leftrightarrow$ t = 1 - lnx ; $y = e^{1-\ln x-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$. Die Hochpunkte der Schar liegen auf einer Hyperbel.	2	5	1	Erkennen der 3 angegebenen Umformungs-schritte bzw. Ergebnisse und ihre Interpreta-tion. Ortskurve er-kennen.
c.	Richtiges Formulieren des gesuchten Integrals mit $\int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} f_t(x)dx = A$. Ermittlung der passenden Stammfunktion durch z. B. partielle Integration . Flächenberechnung: $A = \int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} (\frac{t+\ln(x)}{x})dx = [t\ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2]_{e^{-t}}^{e^{1-t}} = \frac{1}{2}$. Das Ergebnis ist vom gewählten Parameter unabhängig.	2	7	1	Anwendung der partiellen Integ-ration. Im Ergebnis taucht der Pa-rameter t nicht mehr auf.
d.	Interpretiert man die einzelnen Seiten der Gleichung als Funktionen [$n(z) = z^2 + 6z + 10$; $t(z) = (\frac{-V}{\pi} + 14{,}78)e^z$] und zeichnet deren Graphen in ein gemeinsames Koordina-tensystem, kann man über den Schnittpunkt der Kurven eine Lösung finden. Ist $V \geq 14{,}78 \cdot \pi$, so gibt es keine Lösung. Der Graph von $t(z)$ verläuft dann nämlich auf bzw. unter-halb der x-Achse, $n(z)$ aber weiterhin immer oberhalb der x-Achse.			5	Erläuterung einer Lösungs-strategie. Vom angegebe-nen Lösungs-weg abwei-chende, aber dennoch zum Ziel führende Lösungen, sind als gleichwertig anzusehen.
	Σ 40	**11**	**22**	**7**	