

Hessisches Kultusministerium

HESSEN



# Landesabitur 2007

Bildungsland  
Hessen



Beispielaufgaben 2005



# Mathematik

## Leistungskurs

### Beispielaufgabe A 5

**Auswahlverfahren:** siehe Hinweise

**Einlese- und Auswahlzeit:** 30 Minuten

**Bearbeitungszeit:** 240 Minuten (für die Gesamtprüfung)

<b>Erlaubte Hilfsmittel:</b>	Übliche Formelsammlung CAS
<b>Sonstige Hinweise:</b>	keine

## I. Thema und Aufgabenstellung

### Analysis

#### Aufgaben

- a. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ .
- Lassen Sie den Graphen von  $f$  plotten und übertragen Sie ihn in ein geeignetes Koordinatensystem auf Papier.
  - Beweisen Sie die vermutete Symmetrieeigenschaft von  $f$ .
  - Berechnen Sie die Wendepunkte und bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse im Intervall zwischen den Wendestellen.
  - Begründen Sie folgenden Grenzwert:  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{-t}^t f(x) dx \right) = 1$ .
- b. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Gaußschen  $\phi$ -Funktion  $\phi$  mit  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$ .

Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen  $f$  und  $\phi$  miteinander, indem Sie mindestens zwei wesentliche Übereinstimmungen und zwei wichtige Unterschiede auffinden und rechnerisch begründen.

- c. Beide Graphen sind Glockenkurven.
- Durch Streckung und Stauchung lässt sich der Graph von  $f$  dem von  $\phi$  anpassen. Führen Sie dies durch und geben Sie einen Term für die Näherungsfunktion  $\bar{f}$  an.
  - Als Maß für die Güte der Anpassung wird das Integral  $\mathfrak{I}(k) = \int_{-k}^k (\phi(x) - \bar{f}(x)) dx$  vorgeschlagen. Mit einer geeigneten Näherung.

für  $\bar{f}$  erhält man nebenstehende Werte:

k	1	2	3
$\mathfrak{I}$	0,0187	0,0328	0,0136

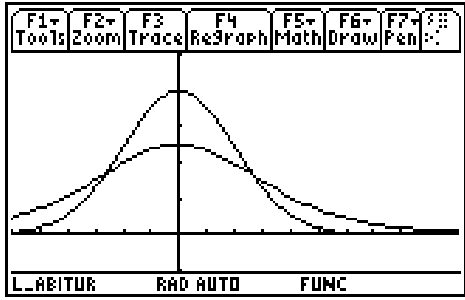
Nehmen Sie Stellung zu diesem Gütemaß und machen Sie Verbesserungsvorschläge (die Sie mit Rechnungen begründen sollen).

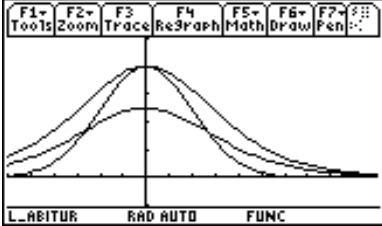
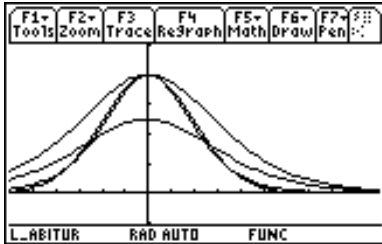
## II. Erläuterungen

In Teil a wird die erste Glockenkurve näher untersucht. In Teil b soll diese Funktion mit der Gaußschen  $\phi$ -Funktion verglichen und in Teil c an diese angepasst werden. Abschließend muss die Güte der Anpassung diskutiert werden.

### III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

3

	$\frac{1}{2} A = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t f(t) dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^t - 1}{2(e^t + 1)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - e^{-t}}{2(1 + e^{-t})} \right) = \frac{1}{2}$ <p style="text-align: center;">weil <math>\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0</math></p>	6	9	2	Grenzwertberechnung mit CAS wird nicht bepunktet, 1 BE, wenn nur mit speziellen großen Werten t gerechnet
b.	 <p><u>Übereinstimmungen:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Graphen achsensymm. zur y-Achse</li> <li>• Hochpunkt bei <math>x=0</math>,</li> <li>• x-Achse Asymptote</li> <li>• Fläche unter den Graphen beträgt 1 Flächeneinheit</li> </ul> <p><u>Unterschiede:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• phi-Funktion hat höheren Hochpunkt  <math>H_f = (0   0,25)</math>, <math>H_\varphi \approx (0   0,4)</math></li> <li>• Wendepunkte von <math>\varphi</math> bei <math>x = \pm 1</math>,  von <math>f</math> bei <math>x_{W1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \approx \pm 1,32</math></li> <li>• Flächeninhalt unter Graph stärker um Achse konzentriert,  z.B. <math>\int_{-1}^1 \varphi(x) dx \approx 0,68</math> und <math>\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0,46</math></li> <li>• auch der Inhalt der Fläche unter den Graphen zwischen den beiden Wendepunkten (bei der <math>\varphi</math>-Funktion entspricht das der <math>1\sigma</math>-Umgebung) ist bei <math>f</math> kleiner:  <math>\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 0,68</math> und <math>\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})} f(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577</math></li> </ul>	3	9		<p>hier muss auf Kenntnisse über die Gausssche <math>\varphi</math>-Funktion zurückgegriffen werden</p> <p>bewusst offene Formulierung; je zwei wesentliche Übereinstimmungen bzw. Unterschiede müssen selbstständig ausgewählt werden</p> <p>andere Eigenschaften sind entsprechend zu werten</p>

c.	<p>Graph von <math>f</math> muss in Richtung der <math>y</math>-Achse gestreckt werden, Streckfaktor <math>\approx 0,4/0,25 = 1,6</math></p> <p>dann Stauchung in Richtung der <math>x</math>-Achse notwendig, damit Flächeninhalt 1 bleibt, muss – da <math>x</math> in <math>f(x)</math> linear - der gleiche Faktor verwendet werden</p> <p><math>\bar{f} = 1,6 \cdot f(1,6 \cdot x)</math> nach Augenmaß liegt gute Anpassung vor</p> <p>Die berechneten Werte für <math>k = 1, 2, 3</math> geben den orientierten Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an. Da <math>\mathfrak{I}(1) &lt; \mathfrak{I}(2)</math> und <math>\mathfrak{I}(2) &gt; \mathfrak{I}(3)</math> ist, müssen sich beide Graphen in <math>[1, 3]</math> mindestens einmal schneiden. Das wird durch Rechnung auch bestätigt (Schnittstelle bei <math>x \approx 1,74</math>) Daher könnte bei diesem Maß der Wert von <math>\mathfrak{I}(k)</math> für <math>k \rightarrow \infty</math> sich auch Null nähern, obwohl die Graphen gar nicht nahe beieinander liegen. Ein Maß, das dieses Nachteil vermeidet, ist das Integral des Betrags der Differenz beider Funktionen</p> $I(k) = \int_{-k}^k \left  \varphi(x) - \bar{f}(x) \right  dx$ <p>Hier erhält man die Werte</p>	 				<p>Dieser Vorgang der zweifachen Abbildung mit Streckung und Stauchung ist bei der Herleitung der Normalverteilung üblich.</p> <p>Integralbegriff im Anwendungszusammenhang</p> <p>TI erlaubt keine Berechnung des Grenzwerts <math>k \rightarrow \infty</math> bei der <math>\varphi</math>-Funktion, (Derive sehr wohl),</p>
			6	5		
	$\Sigma$ 40	9	24	7		