Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Hessisches Kultusministerium

Landesabitur 2007
Beispielaufgaben

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 3

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **GTR**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

a. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

- Lassen Sie den Graphen von f plotten und übertragen Sie ihn in ein geeignetes Koordinatensystem auf Papier.
- Beweisen Sie die vermutete Symmetrieeigenschaft von f.
- Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [-1,3 | 1,3].
- Begründen Sie folgenden Grenzwert: $A = \lim_{t \to \infty} \left(\int_{-t}^{t} f(x)\,dx \right) = 1$

b. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Gaußschen phi-Funktion φ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$.

Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen f und φ miteinander, indem Sie mindestens zwei wesentliche Übereinstimmungen und zwei wichtige Unterschiede auffinden und rechnerisch begründen.

c. Beide Graphen sind Glockenkurven.

- Durch Streckung und Stauchung lässt sich der Graph von f dem von φ anpassen. Führen Sie dies durch und geben Sie einen Term für die Näherungsfunktion $\overline{f}$ an.
- Als Maß für die Güte der Anpassung wird das Integral $\Im(k) = \int_{-k}^{k} \left(\varphi(x) - \overline{f}(x)\right)dx$

vorgeschlagen. Mit einer geeigneten Näherung für $\overline{f}$ erhält man nebenstehende Werte:

k	1	2	3
$\Im$	0,0187	0,0328	0,0136

Nehmen Sie Stellung zu diesem Gütemaß und machen Sie Verbesserungsvorschläge (die Sie mit Rechnungen begründen sollen).

Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

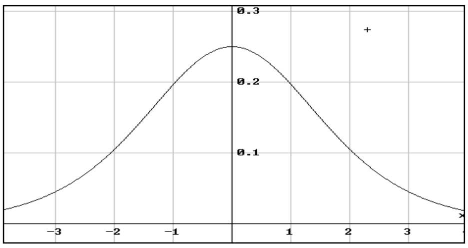
II. Erläuterungen

Zielsetzung
In der Aufgabe geht es darum, zwei verschiedene Glockenkurven zu vergleichen und die eine an die andere anzupassen.
In Teil a wird die erste Glockenkurve näher untersucht. In Teil b soll diese Funktion mit der Gauß-schen φ-Funktion verglichen und in Teil c an diese angepasst werden. Abschließend muss die Güte der Anpassung diskutiert werden.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

<table>
<tr><th></th><th>Erwartete Lösung</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td>a.</td><td>

Zeichnung



Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=\frac{e^{-x}\cdot e^{2x}}{(e^{-x}+1)^2\cdot e^{2x}}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=f(x)$$

Die Ableitung der Funktion F ergibt den Funktionsterm von f.

$$F'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-(e^x-1)\cdot 2e^x}{4(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Flächeninhalt: $\int\limits_{-1,3}^{1,3}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx \approx 0{,}572$

Uneigentliches Integral:

$$\frac{1}{2}A=\lim_{t\to\infty}\left(\int\limits_0^t f(t)dt\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^t-1}{2(e^t+1)}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-e^{-t}}{2(1+e^{-t})}\right)=\frac{1}{2}$$

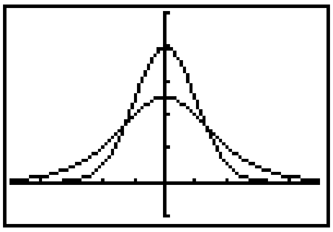
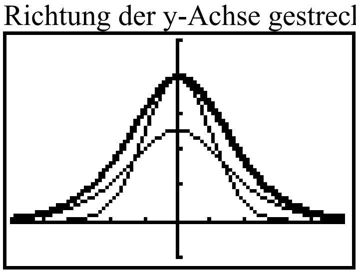
weil $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}=0$

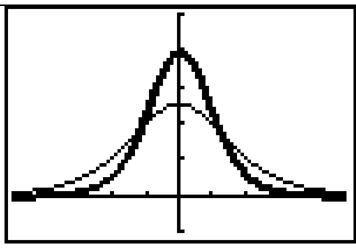
</td><td>6</td><td>9</td><td>2</td><td>Untersuchung einer komplexeren Funktion auf ausgewählte Eigenschaften hin

Stammfunktion

Flächeninhalt

Uneigentliches Integral</td></tr>
</table>

b.	 Übereinstimmungen: • Graphen achsensymm. zur y-Achse • Hochpunkt bei x=0, • x-Achse Asymptote • Fläche unter den Graphen beträgt 1 Flächeneinheit Unterschiede: • phi-Funktion hat höheren Hochpunkt $H_f = (0 \mid 0{,}25)$, $H_\varphi \approx (0 \mid 0{,}4)$ • Wendepunkte von φ bei $x = \pm 1$, von f bei $x_{W1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \approx \pm 1{,}32$ • Flächeninhalt unter Graph stärker um Achse konzentriert, z.B. $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx \approx 0{,}68$ und $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0{,}46$ • auch der Inhalt der Fläche unter den Graphen zwischen den beiden Wendepunkten (bei der φ-Funktion entspricht das der 1σ-Umgebung) ist bei f kleiner: $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 0{,}68 \quad und \quad \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})} f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$	3	9		hier muss auf Kenntnisse über die Gauß-sche φ-Funktion zurückgegriffen werden bewusst offene Formulierung; je zwei wesentliche Übereinstimmungen bzw. Unterschiede müssen selbstständig ausgewählt werden andere Eigenschaften sind entsprechend zu werten
c.	Graph von f muss in Richtung der y-Achse gestreckt werden,  Streckfaktor $\approx 0{,}4/0{,}25 = 1{,}6$ dann Stauchung in Richtung der x-Achse notwendig, damit Flächeninhalt 1 bleibt, muss – da x in f(x) linear - der gleiche Faktor verwendet werden				Dieser Vorgang der zweifachen Abbildung mit Streckung und Stauchung ist bei der Herleitung der Normalverteilung üblich.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


$\overline{f} = 1{,}6 \cdot f(1{,}6 \cdot x)$
nach Augenmaß liegt gute Anpassung vor

Die berechneten Werte für k = 1, 2, 3 geben den orientierten Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche an.
Da $\Im(1) < \Im(2)$ und $\Im(2) > \Im(3)$ ist, müssen sich beide Graphen in [1, 3] mindestens einmal schneiden. Das wird durch Rechnung auch bestätigt (Schnittstelle bei $x \approx 1{,}74$)
Daher könnte bei diesem Maß der Wert von $\Im(k)$ für $k \to \infty$ sich auch Null nähern, obwohl die Graphen gar nicht nahe beieinander liegen.
Ein Maß, das dieses Nachteil vermeidet, ist das Integral des Betrags der Differenz beider Funktionen
$I(k) = \int_{-k}^{k} \left|\varphi(x) - \overline{f}(x)\right| dx$
Hier erhält man die Werte
<table>
<tr><td>k</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>I(k)</td><td>0.0190</td><td>0.0366</td><td>0,0558</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>6</td>
<td>5</td>
<td>Integralbegriff im Anwendungszusammenhang</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Σ 40</td>
<td>9</td>
<td>24</td>
<td>7</td>
<td></td>
</tr>
</table>