Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 9

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Eine quadratische Pyramide (Grundkante 4 und Höhe 6) steht neben einer Treppe.
(Siehe Anlage 1)
Die Sonne scheint und wirft einen Schatten der Pyramide auf der Treppe. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

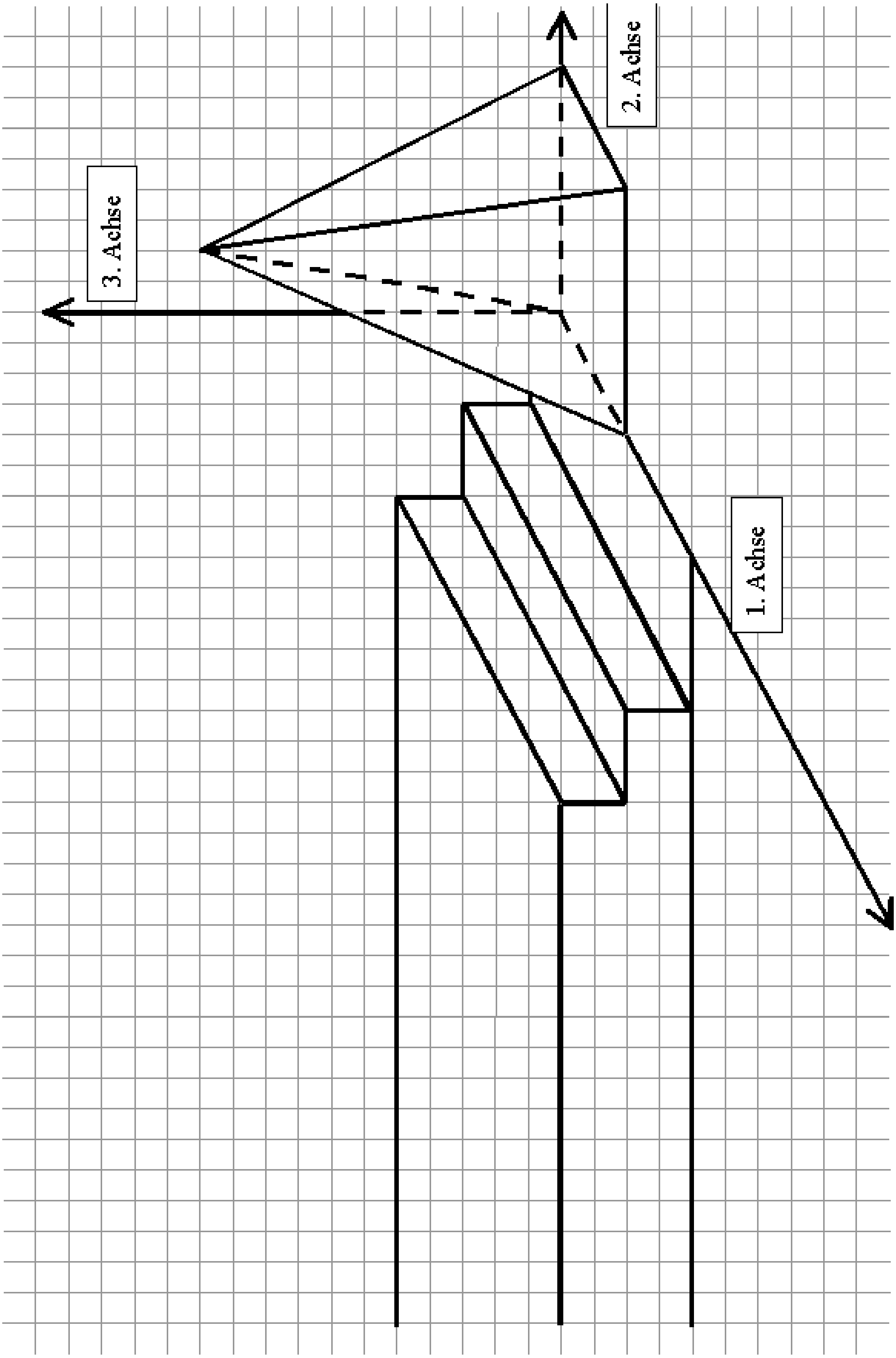
a. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Spitze, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat (Sonnenstrahl durch die Spitze der Pyramide). Zeigen Sie, dass die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen und erklären Sie, wie man mit Hilfe des Punktes Q entscheiden kann, welche Pyramidenflächen in der Sonne liegen.

b. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide und berechnen Sie dazu notwendige Punkte. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

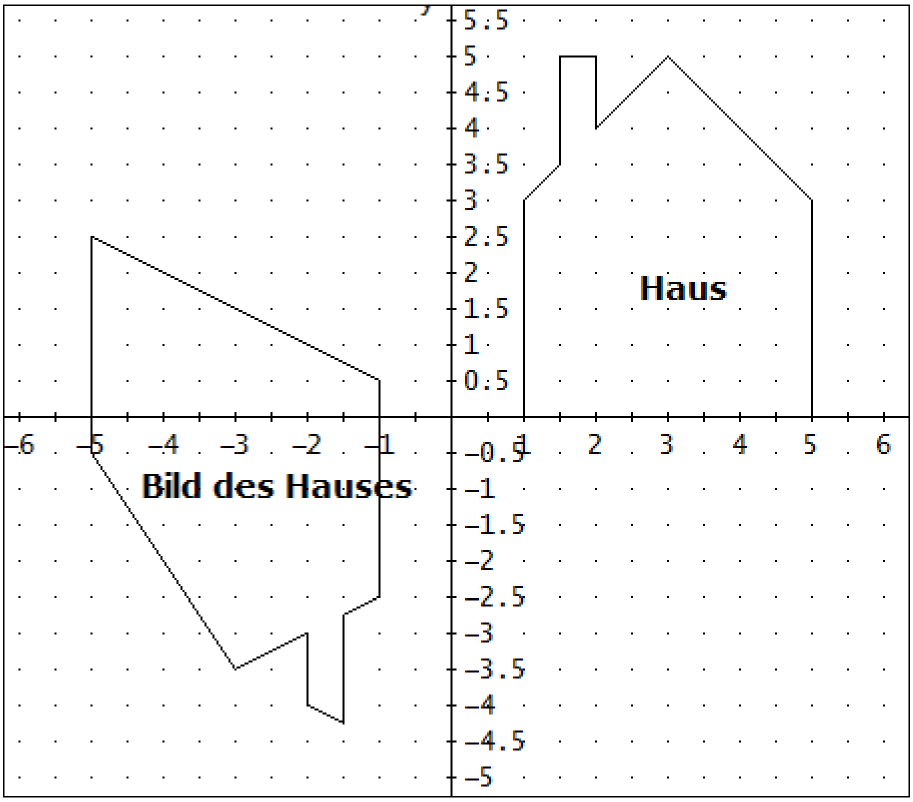
c. Beschreiben Sie, wie man den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf eine Pyramidenfläche auftreffen, berechnen kann. Bestimmen Sie diesen Winkel für eine der beiden Pyramidenflächen, die in der Sonne liegen.

d. Die Darstellung eines räumlichen Objekts auf dem Bildschirm ist eine lineare Abbildung des 3D-Raums in den 2D-Raum.
Im Bild unten ist eine lineare Abbildung des zweidimensionalen Raums dargestellt.
Bestimmen Sie die zugehörige Matrix und erläutern Sie Ihre Überlegungen.

Material 1



Material 2



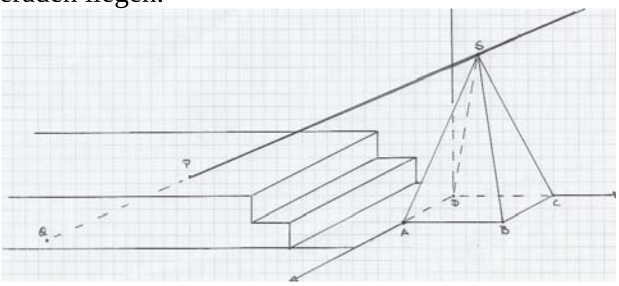
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

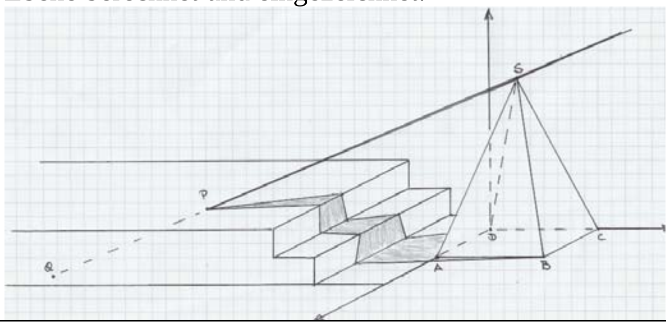
II. Erläuterungen

Zielsetzung
Die Aufgabe orientiert sich an den Leitideen Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Modellieren. Die Aufgabe überprüft die Fähigkeit, sich in ein räumliches Problem hinein zu denken und dieses zu strukturieren. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt. Es wird die Darstellung der Situation auf einem Blatt eingefordert. Diese verlangt konzentriertes Arbeiten und präzise Zeichnungen. Die Darstellung der Situation mit dem CAS als Projektion des dreidimensionalen Raums in den zweidimensionalen Raum sollten die Schüler kennen und sie sollten mit Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen vertraut sein.

Bezug zum Lehrplan
Die üblichen Verfahren zur Untersuchung von Geraden und Ebenen (Punkt-Richtungsform und Koordinatengleichung), der Normalenvektor, das Skalarprodukt und die Berechnung von Längen und Winkeln (12 II) werden benötigt. Die offene Aufgabenstellung an einem realen Objekt ermöglicht unterschiedliche Lösungswege, die aber zum gleichen Ergebnis führen. Die Darstellung der Körper im 2-dimensionalen Raum wird als lineare Abbildung gedeutet, und es werden Matrizen (12 II *) genutzt. Für die umfangreichen Berechnungen ist die Nutzung eines CAS sinnvoll.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	I	II	III	Bezug zum Lehrplan
a.	Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Treppe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden. A := [4, 0, 0] B := [4, 4, 0] C := [0, 4, 0] D := [0, 0, 0] S := [2, 2, 6] Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.  Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke BCS und CDS in der Sonne liegen.	2	5	0	Vektoren Parameterdarstellung einer Geraden Lagebeziehung von Punkt und Gerade

b.	Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden. Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Kante SB gebildet wird, betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt. Die Kanten werden durch einfache Gleichungen (z. B. y = -2.5 und z = 1) beschrieben. Die Schnittpunkte der Kanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet. Die übrigen Punkte werden als Schnittpunkte der Kanten mit der durch SP und der Kante SD aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet. 	4	6	0	Parameterdarstellung einer Ebene Lagebeziehung von Geraden und einer Ebene
c.	Die Schüler haben erkannt, dass z. B. die Fläche BCS „in der Sonne liegt“. Sie beschreiben das Verfahren der Winkelberechnung. Um den Winkel zu berechnen, wird zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt, der „nach innen“ gerichtet ist. Mit diesem Vektor und dem Richtungsvektor v der Sonnenstrahlen wird der eingeschlossene Winkel berechnet (15.9°). Der gesuchte Winkel ist dann 74.1° $n := [0,\ -3,\ -1]$ $\frac{n \cdot v}{\lvert n\rvert \cdot \lvert v\rvert} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}$ $\alpha := \mathrm{ACOS}\left(\frac{17 \cdot \sqrt{2}}{25}\right)$	0	3	2	Skalarprodukt Orthogonalität von Vektoren Winkel zwischen zwei Vektoren Interpretation der Lösung
d.	Die Sch. entnehmen zu zwei beliebigen Punkten die zugehörigen Bildpunkte aus der Zeichnung (z.B. zu (1,0) gehört der Bildpunkt (-1,0.5) und zu (3,5) der Punkt (-3,-3.5) und berechnen durch Matrizenmultiplikation oder durch Lösen eines LGS die Werte der zugehörigen Abbildungsmatrix. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -3 & -3.5 \end{bmatrix}$ $a1 = -1 \wedge a2 = 0.5 \wedge a3 = 0 \wedge a4 = -1$	1	4	3	Matrix und Matrizenprodukt Anwendung in der Geometrie