Hessisches Kultusministerium

HESSEN

Landesabitur 2007

Bildungsland Hessen

Beispielaufgaben 2005

Mathematik

Leistungskurs

Beispielaufgabe A 6

Auswahlverfahren: **siehe Hinweise**

Einlese- und Auswahlzeit: **30 Minuten**

Bearbeitungszeit: **240 Minuten (für die Gesamtprüfung)**

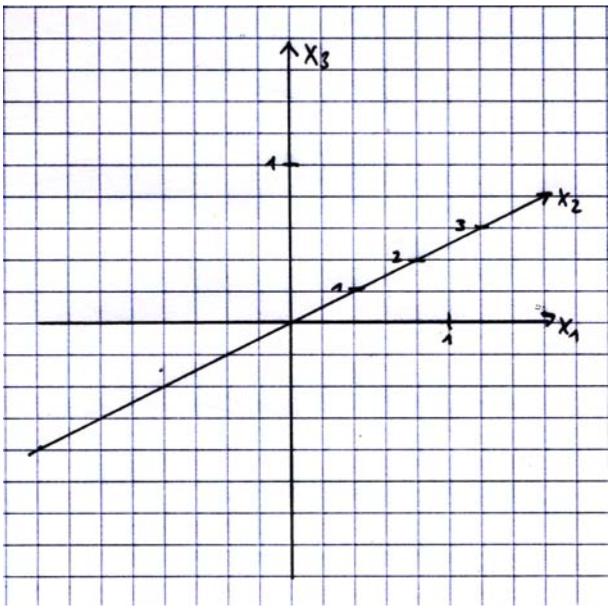
Erlaubte Hilfsmittel:	**Übliche Formelsammlung** **TR, GTR oder CAS**
Sonstige Hinweise:	**keine**

I. Thema und Aufgabenstellung

Lineare Algebra / Analytische

Aufgaben

a. Die Eckpunkte A(1|1|0), B(1|-1|2), C(-1|-1|0) und D(-1|1|2) bilden einen räumlichen Körper. Zeichnen Sie diese Punkte in ein der Vorgabe entsprechendes Koordinatensystem ein.



b. Zeigen Sie, dass dieser Körper ein regelmäßiges Tetraeder ist. Erläutern Sie Ihre Überlegungen bei der Lösung.

c. Zeigen Sie, dass die Punkte A, C und D in der Ebene E mit der Gleichung $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$ liegen. Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Ebene mit derjenigen Geraden, die durch den Punkt B geht und die senkrecht auf der Ebene E steht. Welchen Abstand hat der Punkt B von der gegenüberliegenden Tetraederfläche?

d. **(Diese Teilaufgabe ist nur dann zu bearbeiten, falls in 12 II die Lehrplanvariante „Fortführung der Analytischen Geometrie“ im Unterricht behandelt wurde.)**

Auf der 1-2-Ebene liegt auf dem Punkt P(10|-10|0) eine Kugel mit dem Radius r=1. Diese rollt nun geradlinig auf dieser Ebene auf den Ursprung des Koordinatensystems zu, bis sie die von den Eckpunkten A, B und C gebildete Seitenfläche F des Tetraeders berührt. Bestimmen Sie für diese Endlage der Kugel die Koordinaten des Kugelmittelpunktes M und des Berührpunktes G der Kugel mit der Seitenfläche F des Tetraeders.

e. **(Diese Teilaufgabe ist nur dann zu bearbeiten, falls in 12 II die Lehrplanvariante „Matrizen und lineare Abbildungen“ im Unterricht behandelt wurde.)**

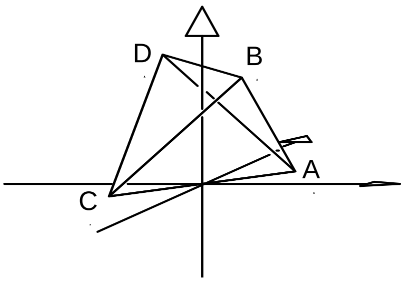
Eine Abbildung $\alpha : \Re^3 \to \Re^3$ heißt lineare Abbildung, wenn α die Linearitätseigenschaften (L1) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$ und (L2) $\alpha(r \cdot \vec{x}) = r \cdot \alpha(\vec{x})$ erfüllt.
Begründen Sie mit einer kurzen Rechnung, dass bei einer solchen Abbildung der Nullpunkt fest bleibt, d. h. $\alpha(\vec{0}) = \vec{0}$ ist.
Symmetrieabbildungen des Tetraeders sind Abbildungen, bei denen die Bilder der vier Eckpunkte wieder vier Eckpunkte des Tetraeders sind, z. B. eine Abbildung, bei der die Punkte A und C fest bleiben und die Punkte B und D vertauscht werden. Geben Sie alle Symmetrieabbildungen des Tetraeders an, die gleichzeitig lineare Abbildungen sind. Beschreiben Sie die Abbildungen anschaulich und geben Sie die zugehörigen Matrizen an.

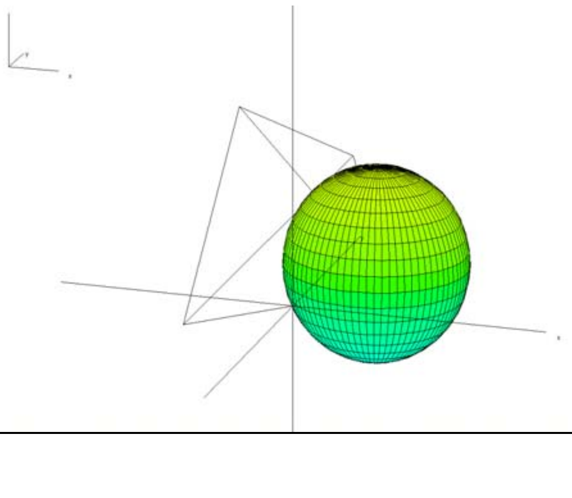
Korrektur- und Bewertungshinweise
- nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

Zielsetzung:
Die Aufgabe erfordert neben einer gut ausgebildeten Raumanschauung und der Fähigkeit, Körper geeignet in einem räumlichen Koordinatensystem darzustellen, eine sichere Anwendung der analytischen Methoden der Vektorgeometrie auf konkrete Körper. Bei der Lösung des Problems ist ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsebenen (grafisch und symbolisch) erforderlich, was ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt.
Im Teil d bzw. Teil e der Aufgabe wird alternativ (je nach Lehrplanvariante) der Einbezug eines Parameters (rollende Kugel) unumgänglich und es soll die Beherrschung von Verfahren zur Beschreibung von Kugeln und Ebenen nachgewiesen werden oder es müssen Matrizen im Zusammenhang mit geometrischen Abbildungen betrachtet werden, wobei die angegebene Definition von Symmetrieabbildungen aufgegriffen und verarbeitet werden muss.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösungen	**Anf.-Bereich**			**Bezug zum Lehrplan/ Bemerkungen**
		I	**II**	**III**	
a.	 Die räumliche Lage muss eindeutig zu erkennen sein.	3	2		Zeichnerische Darstellung von räumlichen Gebilden. Lagebeziehung von Punkten und Geraden im Raum. Die Entscheidung, welche der Linien vorne und hinten sind, erfordert eigenständige Überlegungen
b.	Nachweis, dass $\left\|\vec{b}-\vec{a}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\vec{b}-\vec{c}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\vec{c}-\vec{a}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\right\| =$ $= \left\|\vec{d}-\vec{a}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\vec{d}-\vec{c}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\vec{d}-\vec{b}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\| =$ $= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ und die entsprechenden Erläuterungen	2	2	1	Abstandsbestimmungen zwischen Punkten können zur Beantwortung der Frage herangezogen werden, müssen aber selbstständig erschlossen werden.

c.	Punkte A, C und D in gegebene Ebenengleichung einsetzen und verifizieren oder Gleichung der Ebene E in Parameterform aufstellen: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der Koordinatengleichung $E: x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Schnittpunkte der Geraden $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die durch B geht und deren Richtungsvektor senkrecht ist zur Ebene E mit der Ebene E $S(-\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{2}{3})$. Für den Abstand der Punkte S und B erhält man d(S, B)=$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.	2	7	1	Umgang mit Koordinaten- und Parameterform von Ebenen und Geraden, Orthogonalität und Abstandsbestimmung.
d. oder alternativ Teile.	Gleichung der von Punkt P(10|-10|0) auf den Ursprung zu rollenden Kugel ist $k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 1$. Sie rollt auf die Ebene F mit $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (in Koordinatenform $F: x_1 - x_2 - x_3 = 0$) zu. Wenn die Kugel k die Ebene F berührt, gilt für diesen besonderen Mittelpunkt M, dass d(M,F)=1. Aus der Rechnung folgt $M(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \mid -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \mid 1)$ und für den Berührpunkt $G(\frac{\sqrt{3}+3}{6} \mid -\frac{\sqrt{3}+3}{6} \mid \frac{\sqrt{3}+3}{3})$ 	3	4	3	Lagebeziehungen zwischen Kugel und Ebene sind mittels geeigneter Gleichungen für Kugel (mit Mittelpunktsparameter) und Berührebene F zu ermitteln und die Punkte M und G zu bestimmen

e. oder alternativ Teil d.	$\alpha(\vec{0}) = \alpha(0 \cdot \vec{0})$ $= 0 \cdot \alpha(\vec{0})$ $= \vec{0}$ Anschauliche Beschreibung der Abbildungen und Angabe der 4 Matrizen $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	4	3	Matrizen als lineare Abbildungen Anwendungen von Matrizen in der Geometrie
	Σ 30	**10**	**15**	**5**	