Tag der Mathematik 2003

Gruppenwettbewerb

Einzelwettbewerb

Mathematische Hürden

Lösungen

Allgemeine Hinweise:
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

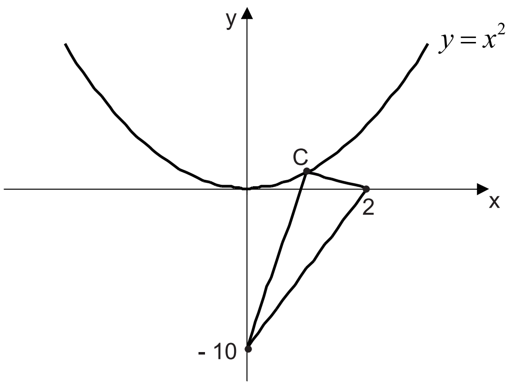
Aufgabe G1 (8 Punkte)

Wählen Sie einen Punkt C auf der Parabel $y = x^2$ so, dass Dreieck ABC mit $A(0, -10)$ und $B(2, 0)$ minimale Fläche hat.

Lösung 1 (Lineare Algebra):

Hesse-Form für die Gerade $5x - y - 10 = 0$ durch A und B:

$$\begin{aligned}\text{Abstand von } C(x, x^2) &= \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot |5x - x^2 - 10| \\ &= \frac{1}{\sqrt{26}} \left(\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right)\end{aligned}$$



Die Fläche ist minimal, wenn der Abstand minimal ist, also bei $\frac{5}{2}$. Damit ist der Punkt C bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ zu wählen.

Lösung 2 (Lineare Algebra):

$$\begin{aligned}\text{Fläche von } \triangle\, ABC &= \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ x^2 + 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^2 + 20 - 10x \end{pmatrix} \right| = \left| x^2 - 5x + 10 \right| = \left| \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right|\end{aligned}$$

Die Fläche ist minimal für $x = \frac{5}{2}$. Damit ist der Punkt C bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ zu wählen.

Lösung 3 (Analysis):

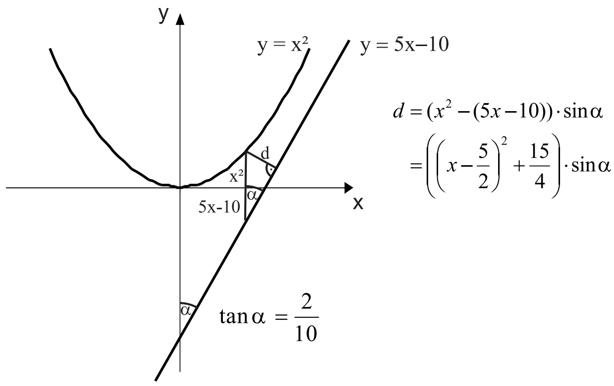
Tangente an Parabel || Gerade durch A und B

$$\text{(Tangentensteigung)} \quad 2x = 5 \quad \text{(Geradensteigung)}$$

Damit ist der Punkt C bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ zu wählen.

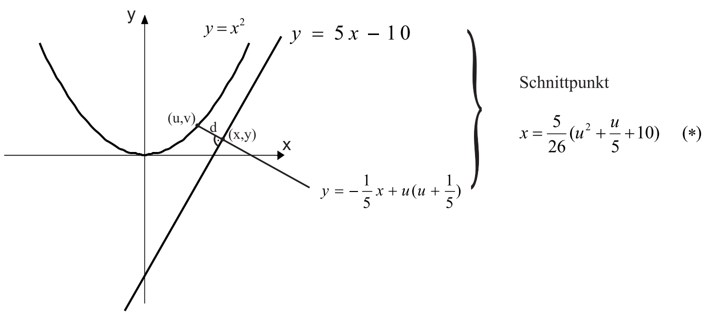
Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: nicole.roth@z-f-m.de

Lösung 4 (Analytische Geometrie):



Die Fläche ist minimal, wenn der Abstand minimal ist, also bei $\frac{5}{2}$. Damit ist der Punkt C bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ zu wählen.

Lösung 5 (Analytische Geometrie):



$$
\begin{aligned}
d^2 &= (x-u)^2 + (y-v)^2 \quad \Big[= (x-u)^2 + (5x - 10 - u^2)^2 = \cdots \\
&= (x-u)^2 \Big(1 + \big(\underbrace{\frac{y-v}{x-u}}_{-\frac{1}{5}}\big)^2\Big) = \frac{26}{25}(x-u)^2
\end{aligned}
$$

Hier x durch $(\star)$ zu ersetzen, führt zu sehr unübersichtlichen Termen.]

$$
\begin{aligned}
&\overset{(\star)}{=} \frac{26}{25}\left(\frac{5}{26}(u^2 + \frac{u}{5} + 10) - u\right)^2 = \frac{1}{26}(u^2 - 5u + 10)^2 \\
&= \frac{1}{26}\left(\left(u - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)^2
\end{aligned}
$$

Die Fläche ist minimal, wenn der Abstand minimal ist, also bei $\frac{5}{2}$. Damit ist der Punkt C bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ zu wählen.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe G2 (8 Punkte)

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist ein Dreieck ABC gegeben durch $A(-2|0)$, $B(2|0)$, $C(u|v)$, $v > 0$.
   (a) Bestimme für allgemeines u,v die Koordinaten des Umkreismittelpunktes M.
   (b) Wie lauten die Koordinaten des Umkreismittelpunktes, wenn das Dreieck rechtwinklig ist ?
2. Zeigen Sie, dass sich die Kreise

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 &= 0 \end{aligned}$$

   berühren.

   Hinweis: Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (a, b) hat die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Lösung:

1. Die Ortslinie aller Umkreismittelpunkte des Dreiecks ABC ist die Mittelsenkrechte von AB, also die y-Achse.
   (a) Sei M_{AC} der Mittelpunkt von AC. Dann ist:

$$M_{AC}\left(\frac{u-2}{2}\middle|\frac{v}{2}\right)$$

   Die Mittelsenkrechte von AC hat die Gleichung:

$$y - \frac{v}{2} = -\frac{u+2}{v}\left(x - \frac{u-2}{2}\right)$$

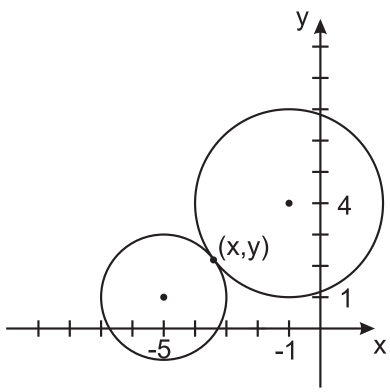
   und mit $x = 0$ ergibt sich für die Koordinaten des Umkreismittelpuntes M_U :

$$M_U\left(0\middle|\frac{v^2 + u^2 - 4}{2v}\right)$$

   (b) Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
      i. der rechte Winkel liegt bei A bzw. B: Dann ist $|u| = 2$ und $y_M = \frac{v}{2}$
      ii. Der rechte Winkel ist bei C. Dann ist $y_M = 0$.

2. Durch Umformen der Kreisgleichungen erhält man:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$



Die Kreisradien sind 3 und 2, die Mittelpunkte haben die Koordinaten $(-1, 4)$ und $(-5, 1)$, ihr Abstand ist $2 + 3 = 5$

Der Berührpunkt hat die Koordinaten (x, y)

$$\text{mit} \quad \frac{5-|x|}{2} = \frac{4}{5} \Longrightarrow x = -\frac{17}{5}$$
$$\text{und} \quad \frac{y-1}{2} = \frac{3}{5} \Longrightarrow y = \frac{11}{5}$$

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe G3 (8 Punkte)

(a) Gegeben ist die Folge $S_1, S_2, S_3, ...$ mit

$$S_1 = 1 \quad , \quad S_2 = 1 \quad , \quad S_{n+1} = \frac{S_{n-1} \cdot S_n}{S_{n-1} + S_n} \quad , \quad n \geq 2$$

Berechnen Sie S_{12}.

(b) Die Folge 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ... besteht aus allen natürlichen Zahlen, die weder Quadratzahlen noch Kubikzahlen sind.

Bestimmen Sie das 500. Glied der Folge.

Lösung:

(a) Sei $a_n = \frac{1}{S_n}$. Dann gilt $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Also ist S_{12} der Kehrwert der 12. Fibonaccizahl, d.h. $S_{12} = \frac{1}{144}$.

(b)

Gestrichen werden 28 Zahlen:

22 Quadratzahlen < 500 $(1^2, 2^2, ..., 22^2 = 484)$

5 Kubikzahlen < 500, die keine Quadratzahlen sind $(2^3, 3^3, ..., 7^3 = 343)$ und

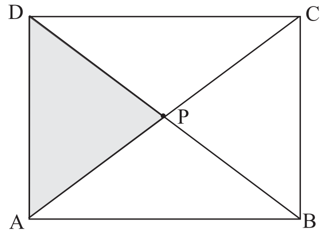
512 $= 8^3$

Also ist 528 das 500. Folgenglied.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

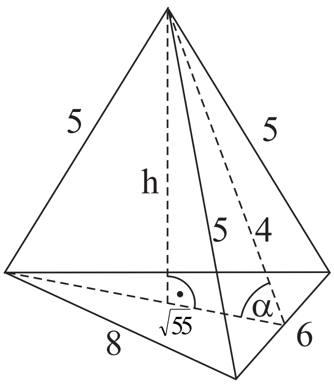
Aufgabe G4 (8 Punkte)

Das Rechteck $ABCD$ aus Papier hat die Seitenlängen 8 und 6 und den Diagonalenschnittpunkt P. Wenn das schraffierte Dreieck APD ausgeschnitten wird und die Seiten AP und PD zusammengefügt werden, so entsteht nach Falten der Strecken BD und PC eine Dreieckspyramide, deren vier Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.



Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung:



$$h = 4 \cdot \sin\alpha \quad \text{und}$$

$$\cos\alpha = \frac{55+16-25}{2\cdot\sqrt{55}\cdot 4} = \frac{23}{4\cdot\sqrt{55}} \quad \text{also}$$

$$h = \frac{\sqrt{351}}{\sqrt{55}} \quad \text{und Volumen}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{55}\cdot\frac{\sqrt{351}}{\sqrt{55}} = \sqrt{351} = 3\sqrt{39}$$

Schulnummer	Teamnummer	Schülernummer	Vorname und Name

Aufgabe E1 (8 Punkte)

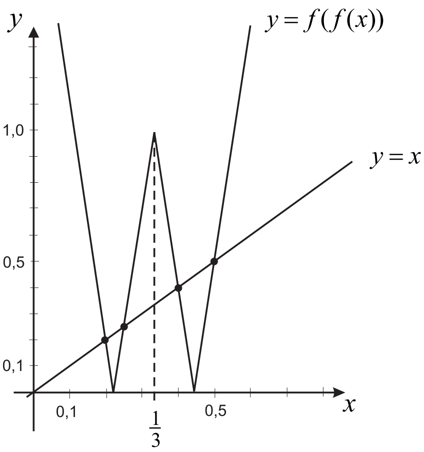
Gegeben ist die Funktion: $f(x) = |3x - 1|$

Berechnen Sie alle x, für die $f(f(x)) = x$ gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned} \Big|3|3x-1|-1\Big| &= x \\ 3|3x-1|-1 &= \pm x \\ 3|3x-1| &= 1 \pm x \end{aligned}$$

$\swarrow \quad \searrow$



für $x \geq \frac{1}{3}$ gilt:	für $x < \frac{1}{3}$ gilt:
$9x - 3 = 1 \pm x$	$3 - 9x = 1 \pm x$
$x = \frac{1}{2}$ oder $x = \frac{2}{5}$	$x = \frac{1}{5}$ oder $x = \frac{1}{4}$

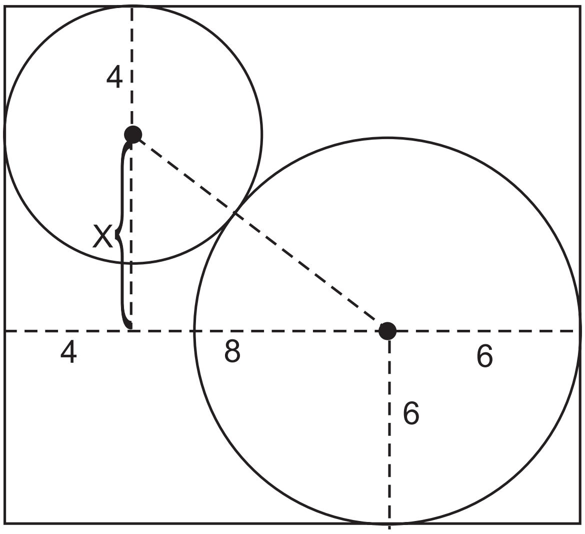
Schulnummer	Teamnummer	Schülernummer	Vorname und Name

Aufgabe E2 (8 Punkte)

Ein Zylinder mit einem Durchmesser von 18 cm soll als Verpackung zweier Kugeln mit einem Durchmesser von 8 cm bzw. 12 cm dienen.

Wie hoch muss der Zylinder mindestens sein?

Lösung:



$$x = \sqrt{100 - 64} = 6$$

$$h = 6 + 4 + x = 16$$

Schulnummer	Teamnummer	Schülernummer	Vorname und Name

Aufgabe E3 (8 Punkte)

In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Summe aus Hypotenuse und einer Kathete gleich 12.

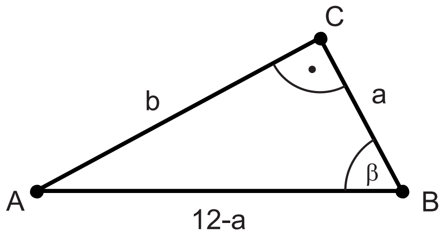
Wie groß ist der Winkel zwischen diesen Seiten, wenn der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks maximal sein soll?

Lösung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (12-a)^2 \Longrightarrow b^2 = 144 - 24a \\ \text{Fläche:} \quad A &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{144-24a} \end{aligned}$$

entweder:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (144 - 24a) \\ A^2 &= 36a^2 - 6a^3 \\ \frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}a} &= 72a - 18a^2 \stackrel{!}{=} 0 \\ 0 &= 18a(4-a) \\ a &= 4 \end{aligned}$$



oder:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{da} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{144-24a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{-24}{2\sqrt{144-24a}} \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{144-24a} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{24}{2\sqrt{144-24a}} \\ 144 - 24a &= 12a \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{12-4} = \frac{1}{2}, \text{ also } \beta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Schulnummer	Teamnummer	Schülernummer	Vorname und Name

Aufgabe E4 (8 Punkte)

Die Parabel $y = x^2$ wird an der Gerade $y = 3$ gespiegelt.
Diese neue Parabel wird an der Geraden $x = 2$ gespiegelt.
Die Gleichung dieser Parabel ist $y = -x^2 + bx + c$.

Berechnen Sie b und c.

Lösung:

Wenn der Graph an	$y = k$	gespiegelt wird, wird jeder	y-Wert	ersetzt durch	$2k - y$.
	$(x = k)$		$(x$-Wert$)$		$(2k - x)$

Aus $2 \cdot 3 - y = (2 \cdot 2 - x)^2$ folgt $y = -x^2 + 8x - 10$, also $b = 8$ und $c = -10$.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Sei n die letzte Ziffer (Einerziffer) der 9-stelligen Zahl $546.324.16n$.
Für welche n ist diese Zahl durch 6 teilbar?

Lösung:

$546.324.16n$ ist durch 6 teilbar, wenn n gerade und die Quersumme von $546.324.16n$ durch 3 teilbar ist.

Die Quersumme $5+4+6+3+2+4+1+6+n = 31+n$ ist durch 3 teilbar für $n = 2$ oder 5 oder 8.

Also ist $546.324.16n$ durch 6 teilbar, wenn $n = 2$ oder 8 ist.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Unter einem "inversen Datum" werde ein Datum verstanden, bei dem Tag und Monat vertauscht sind, z.B. ist das inverse Datum zum 8.4. (April) der 4.8. (August) .

Finden Sie das Datum, bei dem das inverse Datum genau 60 Tage später ist.

Lösung:

Zum Beispiel ist der 5.3. (März) und der 3.5 (Mai) nur $31 + 30 - 2$ Tage auseinander. Also muss das erste Datum in einem Monat mit 31 Tagen sein, dem ein Monat mit 31 Tagen folgt. Somit sind der **9.7.** (Juli) und der **7.9.** (September) 60 Tage auseinander.

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H3 (4 Punkte)

In einer bestimmten Stadt berechnen die Taxis 20 Cent für 500m, wenn schneller als x km/h gefahren wird. Wenn langsamer gefahren wird, werden 15 Cent pro Minute berechnet.

Bei x km/h berechnen beide Tarife den gleichen Preis für den Fahrgast. Berechnen Sie x.

Lösung:

1. Tarif: 60 Cent für 1,5 km
2. Tarif: 60 Cent für 4 min

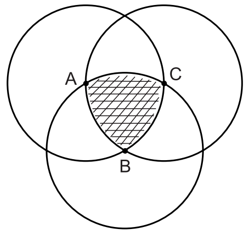
also ist $x = 1,5 \cdot 15 = 22,5$ km/h

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H4 (4 Punkte)

A, B und C seien die Mittelpunkte von drei Einheitskreisen.

Berechnen Sie Umfang und Inhalte der schraffierten Fläche!



Lösung:

Umfang: $3 \cdot \frac{2\pi}{6} = \pi$

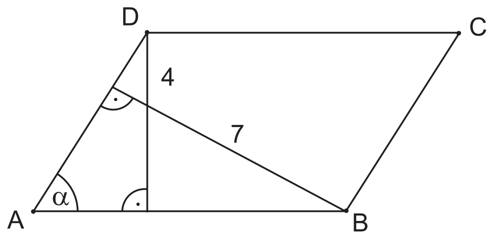
Fläche: $3 \cdot \frac{1}{6}\pi 1^2 - 2 \cdot \frac{1^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H5 (4 Punkte)

Der Umfang eines Parallelogramms ist 40, seine Höhen sind 4 und 7.

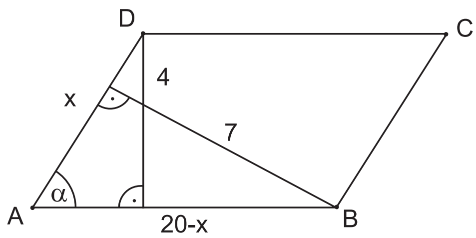
Berechnen Sie $\sin(\alpha)$.



Lösung:

$$\text{Aus } \sin(\alpha) = \frac{4}{x} = \frac{7}{20-x}$$

$$\text{folgt } x = \frac{80}{11} \text{ und } \sin(\alpha) = \frac{11}{20}$$



Schulnummer	Teamnummer	Vorname und Name eines Teammitglieds

Aufgabe H6 (4 Punkte)

Für welche $n = 1, 2, 3, ...$ ist $\frac{n}{20-n}$ eine Quadratzahl?

Lösung:

Für $n \in \{10, 16, 18\}$