Aufgabe A9

a)

$$f_t(x)=\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}\quad f_t'(x)=\frac{6t^4x^2-2t^2}{(1+t^2x^2)^3}\quad f_t''(x)=\frac{24t^4x-24t^6x^3}{(1+t^2x^2)^4}=\frac{24t^4x(1-t^2x^2)}{(1+t^2x^2)^4}$$

Symmetrie:

Der Graph ist ps zu (0/0), da die Zählerfunktion ps zu (0/0) und die Nennerfunktion as zur y-Achse verläuft.

Achsenschnittpunkte:

NS: $x=0$ $\quad \underline{\underline{S_x=S_y(0/0)}}$

Asymptoten:

Die Funktionen f_t sind echt gebrochene Funktionen, d.h. die x-Achse (y = 0) ist Asymptote.
Es gibt keine Polgeraden, denn $1+t^2x^2\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Extrempunkte: $f_t'(x)=0 \;\wedge\; f_t''(x)\neq 0$

$$\Leftrightarrow\ \frac{6t^4x^2-2t^2}{(1+t^2x^2)^3}=0\ \Leftrightarrow\ 6t^4x^2-2t^2=0\ \Leftrightarrow\ \underline{x_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}}\ \text{mögliche Extemstellen}$$

$$f_t''\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)=\frac{24t^4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\left(1-t^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)^2\right)}{\left(1+t^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)^2\right)^4}=\frac{\frac{24}{\sqrt{3}}t^3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}\begin{matrix}>0 \text{ falls } t>0\\ <0 \text{ falls } t<0\end{matrix}\Bigg\}$$

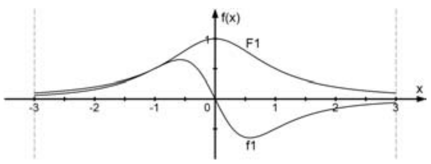
$$\boxed{\begin{matrix}\Rightarrow\ TP\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}/-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t\right)\\ \Rightarrow\ HP\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}/-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t\right)\end{matrix}}$$

$$f_t''\left(-\frac{1}{3t}\right)=\frac{-24t^4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\left(1-t^2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)^2\right)}{\left(1+t^2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)^2\right)^4}=\frac{-\frac{24}{\sqrt{3}}t^3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}\begin{matrix}<0 \text{ falls } t>0\\ >0 \text{ falls } t<0\end{matrix}\Bigg\}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\Rightarrow\ HP\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}/\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t\right)\\ \Rightarrow\ TP\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}/\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t\right)\end{matrix}}$$

$$f_t\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)=-\frac{9}{8\sqrt{3}}t=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t\quad f_t\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot t}\right)=\frac{9}{8\sqrt{3}}t=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot t$$

Die Wendepunkte liegen an den Stellen $x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\frac{1}{t}$.



b)

c)

$$f_t(x)=\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}\quad F_t(x)=\frac{1}{1+t^2x^2}$$

Schnittstellen:

$$\Leftrightarrow\ f_t(x)=F_t(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}=\frac{1}{1+t^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow\ -2t^2x=1+t^2x^2$$

$$\Leftrightarrow\ 0=t^2x^2+2t^2x+1\quad \Big|:t^2\quad (t\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\ 0=x^2+2x+\frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow\ x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$$

Genau eine Lösung $\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{t^2}=0\ \Leftrightarrow\ t^2-1=0\ \Leftrightarrow\ \underline{t_{1/2}=\pm 1}$

Genau zwei Lösungen $\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{t^2}>0\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{t>1}}\quad \underline{\underline{t<-1}}$

Die Graphen der beiden Funktionen f_t und F_t besitzen zwei Schnittpunkte für alle $t\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.
Die Graphen der beiden Funktionen f_t und F_t berühren sich in einem Punkt für $t=1$ oder t = -1
Falls $t\in[-1;1]$ ist, schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen nicht.

d)

$$f_t(x)=\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2} \quad F_t(x)=\frac{1}{1+t^2x^2}$$

1. Möglichkeit: $\boxed{F_t \text{ ist eine Stammfunktion zu } f_t \text{ wenn } F_t'(x)=f_t(x) \text{ gilt.}}$

$$F_t(x)=\frac{0\cdot(1+t^2x^2)-1\cdot 2\cdot t^2\cdot x}{(1+t^2x^2)}=\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}=f_t(x)$$

2. Möglichkeit: $\boxed{\text{Bilden der Stammfunktion von } f_t \text{ durch Integration } \int f_t(x)dx}$

$$\int\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}dx=\int\frac{-2t^2x}{(u)^2}\frac{du}{2t^2x}=\int(-\frac{1}{u^2})du=[\frac{1}{u}+c]=[\frac{1}{1+t^2x^2}+c]$$

Substitution: $u=1+t^2x^2 \quad u'=2tx \qquad \text{Mit } 2t^2x=\frac{du}{dx} \Rightarrow dx=\frac{du}{2t^2x}$

$\Rightarrow F_t(x)=\frac{1}{1+t^2x^2}$ (mit $c=0$) ist eine Stammfunktion zu f_t

F_t besitzt bei x=0 einen Extrempunkt, weil f_t dort eine NS mit VZW besitzt.

F_t besitzt bei $x_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}t}$ jeweils einen Wendepunkt, weil f_t dort Extrempunkte besitzt.

e)

$$A(c)=\left|\int_0^c\frac{-2t^2x}{(1+t^2x^2)^2}dx\right|=\left|[\frac{1}{1+t^2x^2}]_0^c\right|=\left|\frac{1}{1+t^2c^2}-1\right|=1-\frac{1}{1+t^2c^2}$$

$$|x|=\begin{cases}x & ;x>0\\ -x & ;x<0\end{cases} \qquad \frac{1}{1+t^2c^2}-1<0 \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und } c\in\mathbb{R}^+$$

$$\underline{\underline{\lim_{c\to\infty}1-\frac{1}{1+t^2c^2}=1}} \qquad \left[\boxed{c\to\infty} \quad \left.\begin{matrix}1\to 1\\ \frac{1}{1+t^2c^2}\to 0\end{matrix}\right\}A(c)\to 1 \quad \text{wobei } A(c)<1\right]$$

Aufgabe A10

a)

$$f_k:\ f_k(x)=\frac{kx-1}{x^2}\ ;\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f_k'(x)=-\frac{kx-2}{x^3} \quad f_k''(x)=\frac{2(kx-3)}{x^4} \quad f_k'''(x)=-\frac{6(kx-4)}{x^5}$$

Definitionsbereich: $ID_{f_k}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Verhalten im "Unendlichen":

Die Funktion ist echt gebrochen, d.h die x-Achse ist Asymptote.

$\boxed{x\to\infty}$ $\boxed{x\to-\infty}$

1.Fall: $k>0$

$\boxed{\begin{matrix}f(x)\to 0 \quad \text{mit } f(x)>0\\ (f(x)\downarrow 0)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}f(x)\to 0 \quad \text{mit } f(x)<0\\ (f(x)\uparrow 0)\end{matrix}}$

2.Fall: $k<0$

$\boxed{\begin{matrix}f(x)\to 0 \quad \text{mit } f(x)<0\\ (f(x)\uparrow 0)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}f(x)\to 0 \quad \text{mit } f(x)>0\\ (f(x)\downarrow 0)\end{matrix}}$

Verhalten in der Nähe der Definitionslücke:

$k\in\mathbb{R}\setminus\{\backslash 0\}$

$\boxed{x\to 0\ ;\ x<0}$ $\boxed{x\to 0\ ;\ x>0}$

$\boxed{f(x)\to-\infty}$ $\boxed{f(x)\to-\infty}$

Nullstellen:

$$f_k(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad kx-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{1}{k}}$$

Achsenschnittpunkte:

$$\underline{\underline{S_x(\frac{1}{k}/0)}} \quad \underline{\underline{S_y(0/-1)}}$$

$$f_k'(x)=-\frac{kx-2}{x^3} \qquad f_k''(x)=\frac{2(kx-3)}{x^4} \qquad f_k'''(x)=-\frac{6(kx-4)}{x^5}$$

Extrempunkte: $f_k'(x)=0 \quad\wedge\quad f_k''(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad kx-2=0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x=\frac{2}{k}}$ mögliche Extremstelle

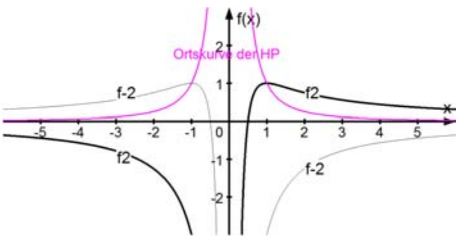
$$f_k''(\frac{2}{k})=\frac{2(k\cdot\frac{2}{k}-3)}{(\frac{2}{k})^4}=-\frac{k^4}{8}<0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{HP(\frac{2}{k}/\frac{k^2}{4})}}$$

Wendepunkte: $f_k''(x)=0 \quad\wedge\quad f_k'''(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2(kx-3)=0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x=\frac{3}{k}}$ mögliche Wendestelle

$$f_k'''(x)=-\frac{6(k\cdot\frac{3}{k}-4)}{(\frac{3}{k})^5}=\frac{2\cdot k^5}{81}\neq 0 \qquad \underline{\underline{WP(\frac{3}{k}/\frac{2k^2}{9})}}$$



b)

Ortskurved der Hochpunkte: $HP(\frac{2}{k}/\frac{k^2}{4})$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{2}{k} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{2}{x} \\ y=\frac{k^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad O(x)=\frac{1}{x^2} \quad ; x\neq 0$$

c)

Zwei verschiedene Funktionen der Schar: $f_{k_1}(x)=\frac{k_1\cdot x-1}{x^2}$ $\quad f_{k_2}(x)=\frac{k_2\cdot x-1}{x^2}$ $\quad ;\ k_1\neq k_2$

Schnittstellenberechnung:

$f_{k_1}(x)=f_{k_2}(x)$

$\Leftrightarrow \quad k_1\cdot x-1=k_2\cdot x-1$

$\Leftrightarrow \quad (k_1-k_2)\cdot x=0 \quad x\neq 0$,denn $0\notin \mathbb{D}_{f_k}$ und $k_1-k_2\neq 0$,denn $k_1\neq k_2$

$\Rightarrow$ Es gibt <u>keine</u> Schnittstellen zwischen zwei verschiedenen Funktionen der Schar.

Für $|x|\to\infty$ kommen sich die Funktionen unendlich nah, denn es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=0$.

d)

$$\left.\begin{aligned} f_{-2}(x) &= \frac{-2\cdot x-1}{x^2} \\ f_{2}(x) &= \frac{2\cdot x-1}{x^2} \end{aligned}\right\} d(x) = f_2(x) - f_{-2}(x) = \frac{4}{x} \quad (>0 \text{ denn } f_2(x) > f_{-2}(x) \text{ für } x \in [2;8])$$

$$A = \int_2^8 \frac{4}{x}\,dx = [4\cdot \ln x]_2^8 = 4\cdot(\ln 8 - \ln 2) = 4\cdot \ln 4 \text{ FE} = \underline{\underline{\ln 256 \text{ FE} \approx 5{,}5452 \text{ FE}}}$$

Aufgabe A11

a)

$$f_k:\; f_k(x) = \frac{1}{x^2+k^2} \quad;\quad x \in ID_{f_k} \;;\quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$f_k'(x) = \frac{-2x}{(x^2+k^2)^2} \qquad f_k''(x) = \frac{6\cdot x^2 - 2k^2}{(x^2+k^2)^3} = \frac{2\cdot(3x^2-k^2)}{(x^2+k^2)^3} \qquad f_k'''(x) = \frac{24\cdot x\cdot(x^2-k^2)}{(x^2+k^2)^4}$$

Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}$

(Symmetrie: Es liegt Achsensymmetrie zur y-Achse (as) vor.)

Verhalten im Unendlichen:

Die Funktion ist echt gebrochen. $\Rightarrow\; x \to \pm\infty \quad f_k(x) \to 0 \quad (f(x) > 0)$

Achsenschnittpunkte:

keine Nullstellen $\Rightarrow$ kein Schnittpunkt mit der x-Achse ; $\underline{\underline{S_y(0/\frac{1}{k^2})}}$

Extrempunkte: $f_k'(x) = 0 \;\wedge\; f_k''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow\; -2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 0}$ mögliche Extremstelle

$$f_k''(0) = \frac{2\cdot(-k^2)}{(k^2)^3} = -\frac{2}{k^4} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{HP(0/\frac{1}{k^2})}}$$

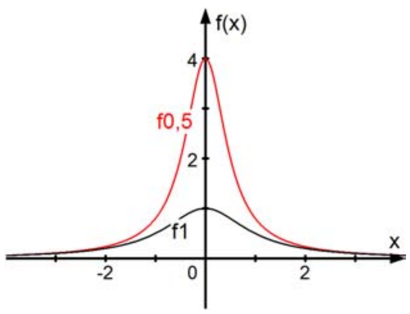
Wendepunkte: $f_k''(x) = 0 \;\wedge\; f_k'''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow\; 2\cdot(3x^2-k^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{x_{1/2} = \pm\frac{k}{\sqrt{3}}}$ mögliche Wendestellen

$$f_k'''(\frac{k}{\sqrt{3}}) = \frac{24\cdot\frac{k}{\sqrt{3}}\cdot((\frac{k}{\sqrt{3}})^2 - k^2)}{((\frac{k}{\sqrt{3}})^2 + k^2)^4} = \frac{-16\cdot\frac{k^3}{\sqrt{3}}}{(\frac{4}{3}k^2)^4} = -\frac{81}{16\cdot\sqrt{3}\cdot k^5} \neq 0 \quad \text{wg. as: } f_k'''(-\frac{k}{\sqrt{3}}) \neq 0$$

$$\underline{\underline{WP_1(-\frac{k}{\sqrt{3}}/\frac{3}{4\cdot k^2})}} \quad \underline{\underline{WP_2(\frac{k}{\sqrt{3}}/\frac{3}{4\cdot k^2})}}$$

Wertebereich: $\underline{\underline{W =]0;\frac{1}{k^2}]}}$



b)

$$WP_1\left(-\frac{k}{\sqrt{3}} / \frac{3}{4\cdot k^2}\right) \quad WP_2\left(\frac{k}{\sqrt{3}} / \frac{3}{4\cdot k^2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{k}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad k = -\sqrt{3}\cdot x \\ y &= \frac{3}{4\cdot k^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = O(x) = \frac{3}{4\cdot(-\sqrt{3}\cdot x)^2} = \frac{1}{4\cdot x^2} \text{ (Funktionsgleichung der Ortskurve)}$$

Die Ortkurve ist also eine Hyperbel. $\mathbb{D}_O = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c)

$$WP_1\left(-\frac{k}{\sqrt{3}} / \frac{3}{4\cdot k^2}\right) \quad WP_2\left(\frac{k}{\sqrt{3}} / \frac{3}{4\cdot k^2}\right) \quad \text{Tangente:} \quad t: \quad y = m\cdot x + b$$

$$m = f_k'(x_w) = \frac{-2x}{(x^2+k^2)^2}$$

$$m_1 = f_k'\left(-\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{2\cdot k}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}k^4} = \frac{9}{8\cdot\sqrt{3}\cdot k^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3} \qquad m_2 = f_k'\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3}$$

$$t_1: \quad \frac{3}{4\cdot k^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3}\cdot\left(-\frac{k}{\sqrt{3}}\right) + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{9}{8k^2} \qquad t_2: \quad \frac{3}{4\cdot k^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3}\cdot\frac{k}{\sqrt{3}} + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{9}{8k^2}$$

$$\underline{\underline{t_1(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3}\cdot x + \frac{9}{8k^2}}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{t_2(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{8\cdot k^3}\cdot x + \frac{9}{8k^2}}}$$

Nullstelle der Tangente t_1: $x_N = -\frac{3\cdot k}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{-\sqrt{3}\cdot k}}$

Nullstelle der Tangente t_2: $x_N = \frac{3\cdot k}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{3}\cdot k}}$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{\infty} f_k(x)\,dx$$

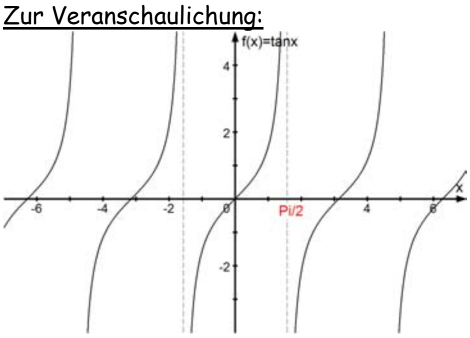
$$\int_0^{\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f_k(x)\,dx$$

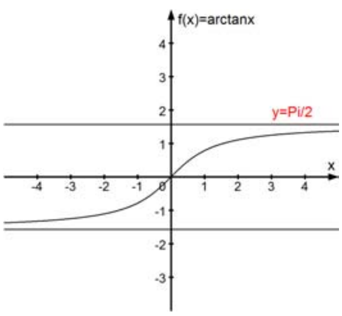
$$\int_0^a f_k(x)\,dx = \int_0^a \frac{1}{x^2+k^2}\,dx \overset{\text{Formelsmmlung S. 35}}{=} \left[\frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k}\right]_0^a = \frac{1}{k}\arctan\frac{a}{k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = 2\cdot\lim_{a\to\infty}\int_0^a f_k(x)\,dx = 2\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{1}{k}\arctan\frac{a}{k} = \frac{2}{k}\cdot\lim_{a\to\infty}\arctan\frac{a}{k} = \frac{2}{k}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{k}}}$$

$$\lim_{a\to\infty}\arctan a = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{a\to\infty}\arctan\frac{a}{k} = \frac{\pi}{2}$$

<u>Zur Veranschaulichung:</u>





Aufgabe A12

a) $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4}{x^2-4}$

Aufgabe A13

a)

$$f_k(x) = \frac{kx^2}{x-k} \quad f_k{}'(x) = \frac{kx^2-2k^2x}{(x-k)^2} \quad f_k{}''(x) = \frac{2k^3}{(x-k)^3}$$

Extrempunkte:

$f_k{}'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k{}''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad kx^2 - 2k^2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx(x-2k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2k\,!$

$f_k{}''(0) = \frac{2k^3}{(0-k)^3} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{HP(0/0)}}$

$f_k{}''(2k) = \frac{2k^3}{(2k-k)^3} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{TP(2k/4k^2)}}$

b)

$t \parallel g \quad \Leftrightarrow \quad m_t = m_g = -2$

$m_t = f_k{}'(1) = \frac{k-2k^2}{(1-k)^2} = -2$

$\Leftrightarrow \quad -2 \cdot (1-k)^2 = k - 2k^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 = k - 2k^2 + 2(1-2k+k^2)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = -3k + 2$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = \frac{2}{3}}} \quad \searrow \quad P(1/1) \qquad t(x) = -2 \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad 2 = -2 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t(x) = -2 \cdot x + 4}}$