Aufgabe A5

a)

$f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}$

$f'(x) = (5-5x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad f''(x) = (5x^3 - 15x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad f'''(x) = (-5x^4 + 30x^2 - 15) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Randverhalten:

$\boxed{x \to \infty}$

$$\left.\begin{matrix} 5x \to \infty \\ e^{-\frac{1}{2}x^2} \downarrow 0 \end{matrix}\right\} f(x) \downarrow 0$$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\left.\begin{matrix} 5x \to -\infty \\ e^{-\frac{1}{2}x^2} \downarrow 0 \end{matrix}\right\} f(x) \uparrow 0$$

bzw. mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}} = 0 \ (>0) \qquad \lim_{x\to-\infty} 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}} = 0 \ (<0)$$

Achsenschnittpunkte:

Nullstelle: $x = 0$

$S_x(0/0) = S_y$

Extrempunkte:

$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (5-5x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 5 - 5x^2 = 0 \qquad e^{-\frac{1}{2}x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$ mögliche Extremstellen

$f''(1) = (5-15) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-10}{\sqrt{e}} < 0 \qquad \Rightarrow \quad HP(1/\frac{5}{\sqrt{e}})$

$f''(-1) = (-5+15) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\sqrt{e}} > 0 \qquad \Rightarrow \quad TP(-1/-\frac{5}{\sqrt{e}})$

Wendepunkte:

$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (5x^3 - 15x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 5x^3 - 15x = 0 \qquad e^{-\frac{1}{2}x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$ mögliche Wendestellen

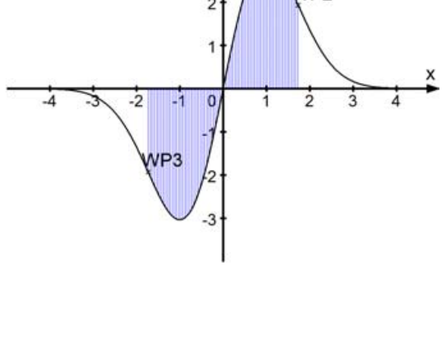
$f'''(0) = -15 \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad WP_1(0/0)$

$f'''(\pm\sqrt{3}) = 30 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad WP_2(\sqrt{3}/5\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}}) \qquad WP_3(-\sqrt{3}/-5\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}})$

Wertebereich:

$W = [-\frac{5}{\sqrt{e}}; \frac{5}{\sqrt{e}}]$

b)



c)

(1) $F(x) = 5 \cdot e^{-x} \qquad F'(x) = -5 \cdot e^{-x} \neq f(x)$

(2) $\underline{\underline{F(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad F'(x) = -5 \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 5x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)}}$

(3) $F(x) = -\frac{5}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad F'(x) = -\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-\frac{5}{2}x)(-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = (\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2})\; e^{-\frac{1}{2}x^2} \neq f(x)$

$F(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist eine Stammfunktion zu f, denn es gilt $F'(x) = f(x)$.

d)

$F(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$A = \underbrace{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{3}} f(x)dx}_{\text{wegen Punktsymmetrie}} = 2 \cdot [-5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot [(-5 \cdot e^{-\frac{3}{2}}) - (-5)] = \underline{\underline{10 - 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}}\ \text{FE} \approx 7{,}77\text{FE}}}$$