Aufgabe A6

a)

$f_k(x) = kx^2 e^{-x+1,5} \quad k \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = (2kx - kx^2)\cdot e^{-x+1,5} \quad f''(x) = (kx^2 - 4kx + 2k)\cdot e^{-x+1,5} \quad f'''(x) = (6kx - 6k - kx^2)\cdot e^{-x+1,5}$

$\underline{\text{Definitionsbereich:}} \quad ID = \mathbb{R}$

$\underline{\text{Randverhalten:}}$

$\boxed{x \to \infty}$

$\left.\begin{array}{l} kx^2 \to \infty \\ e^{-x+1,5} \downarrow 0 \end{array}\right\} f(x) \downarrow 0$

$\boxed{x \to -\infty}$

$\left.\begin{array}{l} kx^2 \to \infty \\ e^{-x+1,5} \to \infty \end{array}\right\} f(x) \to \infty$

Achsenschnittpunkte:

$\underline{\text{Nullstelle:}} \quad x_{1/2} = 0$

$\underline{\underline{S_x(0/0) = S_y}}$

$\underline{\text{Extrempunkte:}}$

$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (2kx - kx^2)\cdot e^{-x+1,5} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2kx - kx^2 = 0 \qquad e^{-x+1,5} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad kx(2 - x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = 0} \qquad \underline{x_2 = 2}$ mögliche Extremstellen

$f''(0) = 2k \cdot e^{1,5} > 0$ denn k>0 $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{TP(0/0)}}$

$f''(2) = (-2k)\cdot e^{-0,5} < 0$ denn k>0 $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{HP(2/\frac{4k}{\sqrt{e}})}}$

$\underline{\text{Wendepunkte:}}$

$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (kx^2 - 4kx + 2k)\cdot e^{-x+1,5} = 0 \qquad e^{-x+1,5} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad kx^2 - 4kx + 2k = 0 \qquad |:k \quad (k>0)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41} \approx 3,41 \quad \vee \quad \underline{x_{2/3} = 2 - \sqrt{2}} \approx 0,59$ mögliche Wendestellen

$f'''(2+\sqrt{2}) = (6k(2+\sqrt{2}) - 6k - k(4+2\sqrt{2}+2))\cdot e^{-x+1,5} = 8\sqrt{2}k \neq 0 \quad (k>0) \quad \Rightarrow \quad$ WP

$f'''(2-\sqrt{2}) = (6k(2-\sqrt{2}) - 6k - k(4-2\sqrt{2}+2))\cdot e^{-x+1,5} = -8\sqrt{2}k \neq 0 \quad (k>0) \quad \Rightarrow \quad$ WP

$\underline{\underline{WP_1(2+\sqrt{2}/(6k+4\sqrt{2}k)e^{-\sqrt{2}-0,5})}} \qquad \underline{\underline{WP_2(2-\sqrt{2}/(6k-4\sqrt{2}k)e^{\sqrt{2}-0,5})}}$

$\underline{\text{Symmetrie:}}$

$f_k(x) = kx^2 e^{-x+1,5} \qquad f_k(-x) = kx^2 e^{x+1,5} \qquad -f_k(-x) = -kx^2 e^{x+1,5}$

$f_k(x) \neq f_k(-x) \quad \wedge \quad f_k(x) \neq -f_k(-x)$ keine einfache Symmetrie erkennbar

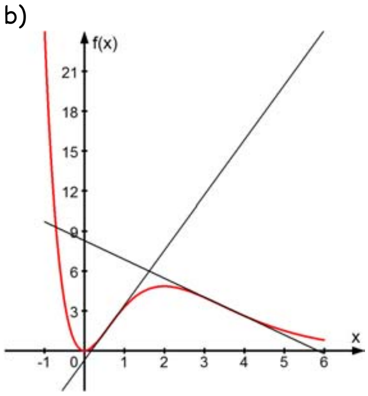
$\underline{\text{Wertebereich:}}$

$W = [0; \infty[$

$\underline{\text{Ortskurve der Hochpunkte:}}$

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\frac{4k}{\sqrt{e}} \end{array}\right\}$ Alle Hochpunkte liegen auf einer Parallelen zur y-Achse durch x=2.

b)



c)

$f_k(x) = kx^2 e^{-x+1,5} \quad k \in \mathbb{R}^+ \qquad f'(x) = (2kx - kx^2) \cdot e^{-x+1,5}$

$WP_1(2+\sqrt{2} / (6k + 4\sqrt{2}k)e^{-\sqrt{2}-0,5}) \quad WP_2(2-\sqrt{2} / (6k - 4\sqrt{2}k)e^{\sqrt{2}-0,5})$

Tangente im Tiefpunkt: $\underline{\underline{y = 0}}$

Tangente in den Wendepunkten:

$m_1 = f'(2+\sqrt{2}) = (2k(2+\sqrt{2}) - (6k + 4\sqrt{2}k)) \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5} = (-2k - 2k\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5} = -2k(1+\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5}$

$m_2 = f'(2-\sqrt{2}) = (2k(2-\sqrt{2}) - (6k - 4\sqrt{2}k) \cdot e^{\sqrt{2}-0,5} = (-2k + 2k\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}-0,5} = 2k(\sqrt{2}-1) \cdot e^{\sqrt{2}-0,5}$

$(6k + 4\sqrt{2}k)e^{-\sqrt{2}-0,5} = -2k(1+\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5} \cdot (2+\sqrt{2}) + b_1$

$(6k - 4\sqrt{2}k)e^{\sqrt{2}-0,5} = 2k(\sqrt{2}-1) \cdot e^{\sqrt{2}-0,5} \cdot (2-\sqrt{2}) + b_2$

$\underline{\underline{t_1(x) = -2k(1+\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5} \cdot x + k \cdot e^{-\sqrt{2}-0,5}(10\sqrt{2}+14)}}$

$\underline{\underline{t_2(x) = 2k(\sqrt{2}-1) \cdot e^{\sqrt{2}-0,5} \cdot x + k \cdot e^{\sqrt{2}-0,5}(14-10\sqrt{2})}}$

d)

$A = \lim_{u \to \infty} A(u)$

$A(u) = \int_0^u f_2(x)dx = [-2e^{-x+1,5}(x^2 + 2x + 2)]_0^u = \underline{-2e^{-u+1,5}(u^2 + 2u + 2) - (-4e^{1,5})}$

$A = \lim_{u \to \infty} A(u) = \underline{\underline{4e^{1,5} \approx 17,93FE}}$

e)

$A = \int_0^2 kx^2 e^{-x+1,5} dx = 2 \cdot k \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot (e^2 - 5) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = \frac{5 \cdot \sqrt{e}}{2(e^2 - 5)}}} \approx 1,725$

In d) und e) muss jeweils partiell integriert werden.