Aufgabe A4

$f_k(x) = x \cdot e^{1-kx} \quad x,k \in IR$

$f_k'(x) = (1-kx)\cdot e^{1-kx} \qquad f_k''(x) = (k^2x - 2k)\cdot e^{1-kx} \qquad f_k'''(x) = (3k^2 - k^3x)\cdot e^{1-kx}$

a)

$f_1(x) = x \cdot e^{1-x}$

Definitionsbereich: $ID = \mathbb{R}$

Nullstellen: $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$ denn $e^{1-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Achsenschnittpunkte: $\underline{\underline{S_x = S_y(0/0)}}$

Randverhalten:

$\boxed{x \to \infty}$

$\left.\begin{matrix} x \to \infty \\ e^{1-x} \to 0 \end{matrix}\right\} \underline{\underline{f(x) \downarrow 0}}$

$\boxed{x \to -\infty}$

$\left.\begin{matrix} x \to -\infty \\ e^{1-x} \to \infty \end{matrix}\right\} \underline{\underline{f(x) \to -\infty}}$

b)

$f_1'(x) = (1-x)\cdot e^{1-x} \qquad f_1''(x) = (x-2)\cdot e^{1-x} \qquad f_1'''(x) = (3-x)\cdot e^{1-x}$

Extrempunkte:

$f_1'(x) = 0 \;\wedge\; f_1''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \; (1-x)\cdot e^{1-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-x = 0 \qquad (e^{1-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \; \underline{x=1}$ mögliche Extremstelle/ einzige mögliche ES

$f_1''(1) = (1-2)\cdot e^{1-1} = -1 < 0 \quad HP(1/f(1)) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{HP(1/1)}}$

Wendepunkte:

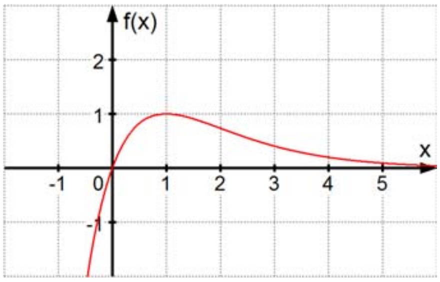
$f_1''(x) = 0 \;\wedge\; f_1'''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \; (x-2)\cdot e^{1-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x-2 = 0 \qquad (e^{1-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \; \underline{x=2}$ mögliche Wendestelle

$f_1'''(x) = (3-2)\cdot e^{1-2} = e^{-1} \neq 0 \quad WP(2/f(2)) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{WP(2/\frac{2}{e})}}$

c)



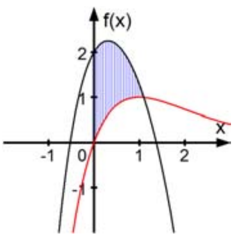
d)

$f_k(x) = x \cdot e^{1-kx} \quad x,k \in IR$

$A(k) = \int_0^7 x \cdot e^{1-kx}dx = [x\cdot(-\tfrac{1}{k}e^{1-kx})]_0^7 - \int_0^7 (-\tfrac{1}{k}e^{1-kx})dx = [x\cdot(-\tfrac{1}{k}e^{1-kx})]_0^7 + [-\tfrac{1}{k^2}e^{1-kx}]_0^7$

$= [(-\tfrac{x}{k} - \tfrac{1}{k^2})e^{1-kx}]_0^7 = \underline{\underline{(-\tfrac{7}{k} - \tfrac{1}{k^2})e^{1-7k} - (-\tfrac{1}{k^2})e^1}}$

e)



$f_1(x) = x \cdot e^{1-kx}$

$g(x) = x \cdot e^{1-kx} - e^x + 3$

$d(x) = g(x) - f(x) = 3 - e^x$

Schnittstelle: $g(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; 3 = e^x \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \ln 3}$

$A = \int_0^{\ln 3} (3 - e^x)dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = 3\ln 3 - 3 + 1 = \ln 27 - 2 \approx \underline{\underline{1,296\ FE}}$

f)

$f_k(x) = x \cdot e^{1-kx} \quad x, k \in \mathbb{R}$

$f_k'(x) = (1-kx)\cdot e^{1-kx} \qquad f_k''(x) = (k^2x - 2k)\cdot e^{1-kx}$

Extrempunkte:

$\Leftrightarrow \quad f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (1-kx)\cdot e^{1-kx} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1-kx = 0 \qquad$ denn $e^{1-kx} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{1}{k}}$ mögliche Extremstelle

$f_k''(\frac{1}{k}) = (k^2\frac{1}{k} - 2k)\cdot e^{1-k\frac{1}{k}} = -k$

1.Fall: $\underline{\underline{k > 0}}$

$-k < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{HP(\frac{1}{k}/\frac{1}{k})}}$

2.Fall: $\underline{\underline{k < 0}}$

$-k > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{TP(\frac{1}{k}/\frac{1}{k})}}$

3.Fall: $k = 0$

Der Graph von $f_0(x) = x \cdot e$ ist eine Gerade, d.h. es existiert kein EP.

Ortskurve:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{k} \\ y = \frac{1}{k} \end{array}\right\} k = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \Rightarrow \quad O(x) = x \quad \mathbb{D}_O = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Alle Extrempunkte liegen auf einer Ursprungsgerade ($x \neq 0$).

g)

$f_1(x) = x \cdot e^{1-x} \quad x \in \mathbb{R} \qquad P(-\frac{1}{2}/0)$

$f_1'(x) = (1-x)\cdot e^{1-x}$

Berührpunkt: $\quad Q(a/f(a))$

Tangente: $\quad t(x) = mx + b$

Tangentensteigung: $\quad m = f_1'(a) = (1-a)\cdot e^{1-a}$

Achsenbschnitt b: Punkt Q in t(x) eingesetzen und nach b aufgelösen:

$b = f_1(a) - f_1'(a)\cdot a = a \cdot e^{1-a} - (1-a)\cdot e^{1-a}\cdot a = a^2 \cdot e^{1-a}$

$\Rightarrow \quad t(x) = (1-a)\cdot e^{1-a}\cdot x + a^2 \cdot e^{1-a}$

Berechnung von a: $\quad P(-\frac{1}{2}/0)$ in t(x) einsetzen:

$0 = (1-a)\cdot e^{1-a}\cdot(-\frac{1}{2}) + a^2 \cdot e^{1-a} \qquad |: e^{1-a} \quad$ (erlaubt da $e^{1-a} \neq 0$)

$0 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = - \; -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\underline{\underline{a_1 = -1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{a_2 = \frac{1}{2}}} \qquad$ Es gibt also zwei mögliche Tangenten.

Berührpunkte: $\quad Q_1(-1/-e^2) \quad Q_2(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\sqrt{e})$

Tangentengleichungen: $\quad \underline{\underline{t_1(x) = 2e^2 \cdot x + e^2}} \qquad \underline{\underline{t_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e}\cdot x + \frac{1}{4}\sqrt{e}}}$