Lösung - Übungsaufgaben zur Wiederholung LK 12

Aufgabe A1 $f_k:\quad f_k(x) = (2kx+4)\cdot e^{-\frac{kx}{2}}$ $\qquad ; ID = \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}^+$

a)

$$f_k(x) = (2kx+4)\cdot e^{-\frac{kx}{2}} \qquad f_k'(x) = -k^2x\cdot e^{-\frac{kx}{2}} \qquad f_k''(x) = (\tfrac{1}{2}k^3x - k^2)\cdot e^{-\frac{kx}{2}} \qquad f_k'''(x) = (-\tfrac{1}{4}k^4x + k^3)\cdot e^{-\frac{kx}{2}}$$

Nullstellen :

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2kx+4)\cdot e^{-\frac{kx}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2kx+4 = 0 \quad \text{, denn } e^{-\frac{kx}{2}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = -\frac{2}{k}}$$

Achsenschnittpunkte :

$$\underline{\underline{S_x(-\frac{2}{k}/0)}} \quad \underline{\underline{S_y(0/4)}}$$

Extrempunkte : $\quad f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad (f_k''(x) \neq 0 \quad \vee \quad \text{VZW bei } f_k')$

$$-k^2x\cdot e^{-\frac{kx}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k^2x = 0 \quad \text{, denn } e^{-\frac{kx}{2}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = 0} \quad \text{mögliche Extremstelle}$$

$$f_k''(0) = (\tfrac{1}{2}k^3\cdot 0 - k^2)\cdot e^{-\frac{k\cdot 0}{2}} = -k^2 < 0 \Rightarrow \quad \underline{\underline{HP(0/4)}}$$

Wendepunkte : $\quad f_k''(x) = 0 \quad \wedge \quad (f_k'''(x) \neq 0 \quad \vee \quad \text{VZW bei } f_k'')$

$$(\tfrac{1}{2}k^3x - k^2)\cdot e^{-\frac{kx}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}k^3x - k^2 = 0 \quad \text{, denn } e^{-\frac{kx}{2}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{2}{k}} \quad \text{mögliche Wendestelle}$$

$$f_k'''(\frac{2}{k}) = (-\tfrac{1}{4}k^4\cdot\frac{2}{k} + k^3)\cdot e^{-\frac{k\frac{2}{k}}{2}} = \frac{k^3}{2\cdot e} \neq 0 \quad \wedge \quad f_k(\frac{2}{k}) = (2k\cdot\frac{2}{k} + 4)\cdot e^{-\frac{k\frac{2}{k}}{2}} = (4+4)\cdot e^{-1} = \frac{8}{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{WP(\frac{2}{k}/\frac{8}{e})}}$$

Randverhalten :

$\boxed{x \to \infty}$

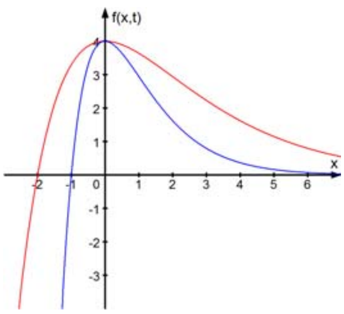
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2kx+4}{e^{\frac{kx}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2k}{e^{\frac{kx}{2}}\cdot(\frac{k}{2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{e^{\frac{kx}{2}}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{(Regel von l'Hospital)} \quad \underline{\underline{f(x)\downarrow 0}}$$

$$(x \to \infty \quad e^{\frac{kx}{2}} \to \infty)$$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\frac{kx}{2}} \to \infty \\ 2kx+4 \to -\infty \end{array}\right\} \underline{\underline{f(x) \to -\infty}}$$

Wertebereich : $\quad W_{f_k} =]-\infty;4]$



b)

$k=1: \quad f_1(x)=(2x+4)\cdot e^{-\frac{x}{2}} \quad A(-3/0)$

Berührpunkt: $B(x_B/y_B)$ im 2.Quadranten $\Rightarrow$ Es muss $-2 \le x_B \le 0$ gelten.

$$\text{Steigung der Tangente:}\quad \left.\begin{array}{l} 1.\quad m=\dfrac{y_B-0}{x_B-(-3)}=\dfrac{y_B}{x_B+3}=\dfrac{(2x_B+4)\cdot e^{-\frac{x_B}{2}}}{x_B+3} \\[2ex] 2.\quad m=f'(x_B)=-x_B\cdot e^{-\frac{x_B}{2}} \end{array}\right\} \dfrac{(2x_B+4)\cdot e^{-\frac{x_B}{2}}}{x_B+3}=-x_B\cdot e^{-\frac{x_B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x_B+4)}{x_B+3}=-x_B \quad\Leftrightarrow\quad 2x_B+4=-x_B{}^2-3x_B \quad\Leftrightarrow\quad 0=x_B{}^2+5x_B+4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x_{B_1}=-1} \quad\vee\quad \underline{x_{B_2}=-4}\notin[-2;0]$$

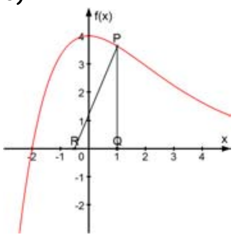
$\Rightarrow$ Berührpunkt: $\underline{\underline{B(-1/2\sqrt{e})}}$

<u>Tangentengleichung:</u>

$t:\quad y=mx+b \qquad m=\sqrt{e}$

$2\sqrt{e}=\sqrt{e}\cdot(-1)+b \quad\Rightarrow\quad b=3\sqrt{e} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{t:\quad t(x)=\sqrt{e}\cdot x+3\sqrt{e}}}$

c)



$P(a/(2a+4)\cdot e^{-\frac{a}{2}}) \quad Q(a/0) \quad R(-\frac{1}{2}/0)$

<u>Dreiecksflächeninhalt:</u>

$A(a)=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})(2a+4)\cdot e^{-\frac{a}{2}}=(a^2+\frac{5}{2}a+1)\cdot e^{-\frac{a}{2}}$

$A'(a)=(a^2+\frac{5}{2}a+1)\cdot e^{-\frac{a}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})+(2a+\frac{5}{2})\cdot e^{-\frac{a}{2}}=(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+2)\cdot e^{-\frac{a}{2}}$

$A''(a)=(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+2)\cdot e^{-\frac{a}{2}}\cdot(-\frac{1}{2})+(-a+\frac{3}{4})\cdot e^{-\frac{a}{2}}=(\frac{1}{4}a^2-\frac{11}{8}a-\frac{1}{4})\cdot e^{-\frac{a}{2}}$

<u>Bedingung für den maximalen Flächeninhalt/ Hochpunkt der Flächeninhaltsfunktion</u>:

$A'(a)=0 \quad\wedge\quad A''(a)<0$

$\Leftrightarrow \quad (-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+2)\cdot e^{-\frac{a}{2}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+2=0 \quad$ denn $e^{-\frac{a}{2}}\neq 0$ für alle $a\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \quad a^2-\frac{3}{2}a-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad a_{1/2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{73}{16}} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a_1=\frac{3+\sqrt{73}}{4}\approx 2{,}886}} \quad\vee\quad a_2=\frac{3-\sqrt{73}}{4}\approx -1{,}386\notin\mathbb{R}^+$

$a=\frac{3+\sqrt{73}}{4}$ mögliche Extremstelle

$A''(\frac{3+\sqrt{73}}{4})\approx -2{,}136\cdot e^{-1{,}443}\approx -0{,}505<0 \quad\Rightarrow\quad HP(\frac{3+\sqrt{73}}{4}/A(\frac{3+\sqrt{73}}{4}))$

$A(\frac{3+\sqrt{73}}{4})\approx 3{,}908$ FE maximaler Flächeninhalt

Antwort: Das Dreieck nimmt einen maximalen Flächeninhalt an, wenn a=$\frac{3+\sqrt{73}}{4}$ gilt.

d)

Integration mit partieller Integration $\int u \cdot v' = [u \cdot v] - \int u' \cdot v$

$$A_k = \int_{-\frac{2}{k}}^{0} (2kx+4) \cdot e^{-\frac{kx}{2}} dx \qquad u = 2kx+4 \quad u' = 2k \quad v' = e^{-\frac{kx}{2}} \quad v = -\frac{2}{k} \cdot e^{-\frac{kx}{2}}$$

$$A_k = [(2kx+4) \cdot (-\frac{2}{k}) \cdot e^{-\frac{kx}{2}}]_{-\frac{2}{k}}^{0} - \int_{-\frac{2}{k}}^{0} 2k(-\frac{2}{k}) \cdot e^{-\frac{kx}{2}} dx = [(-4x - \frac{8}{k}) \cdot e^{-\frac{kx}{2}}]_{-\frac{2}{k}}^{0} + \int_{-\frac{2}{k}}^{0} 4 \cdot e^{-\frac{kx}{2}} dx$$

$$A_k = [(-4x - \frac{8}{k}) \cdot e^{-\frac{kx}{2}}]_{-\frac{2}{k}}^{0} + [-\frac{8}{k} \cdot e^{-\frac{kx}{2}}]_{-\frac{2}{k}}^{0} = [(-4x - \frac{16}{k}) \cdot e^{-\frac{kx}{2}}]_{-\frac{2}{k}}^{0}$$

$$A_k = (-\frac{16}{k}) - (-\frac{8}{k}e) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_k = \frac{8e-16}{k}}}$$

Aufgabe A2

Randverhalten :

$$f_k : f_k(x) = (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}}$$

$\boxed{x \to \infty}$

$$\left.\begin{array}{l} (x-k) \to \infty \\ e^{2-\frac{x}{k}} = e^2 \cdot \dfrac{1}{e^{\frac{x}{k}}} \to 0 \quad (>0) \end{array}\right\} f_k(x) \downarrow 0$$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\left.\begin{array}{l} (x-k) \to -\infty \\ e^{2-\frac{x}{k}} \to \infty \end{array}\right\} f_k(x) \to -\infty$$

$$f_k(x) = (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} \quad f_k'(x) = (2-\frac{x}{k}) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} \quad f_k''(x) = (\frac{x}{k^2} - \frac{3}{k}) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} \quad f_k'''(x) = (\frac{4}{k^2} - \frac{x}{k^3}) \cdot e^{2-\frac{x}{k}}$$

Nullstellen :

$$f_k(x) = 0 \iff (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} = 0 \iff x-k=0 \quad \text{, denn } e^{2-\frac{x}{k}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$\iff \underline{x = k}$$

Achsenschnittpunkte :

$\underline{\underline{S_x(k/0)}}$ $\underline{\underline{S_y(0/-ke^2)}}$

Extrempunkte : $f_k'(x) = 0 \wedge (f_k''(x) \neq 0 \vee \text{VZW bei } f_k')$

$$(2-\frac{x}{k}) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} = 0 \iff (2-\frac{x}{k}) = 0 \quad \text{, denn } e^{2-\frac{x}{k}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$\iff \underline{x = 2k} \text{ mögliche Extremstelle}$$

$$f_k''(2k) = (\frac{2k}{k^2} - \frac{3}{k}) \cdot e^0 = -\frac{1}{k} < 0 \text{ denn } k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \quad HP(2k/f_k(2k)) \quad \underline{\underline{HP(2k/k)}}$$

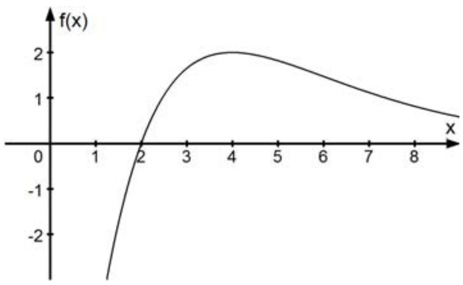
Wendepunkte : $f_k''(x) = 0 \wedge (f_k'''(x) \neq 0 \vee \text{VZW bei } f_k'')$

$$(\frac{x}{k^2} - \frac{3}{k}) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} = 0 \iff \frac{x}{k^2} - \frac{3}{k} = 0 \quad \text{, denn } e^{2-\frac{x}{k}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$\iff \underline{x = 3k} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f_k'''(3k) = (\frac{4}{k^2} - \frac{3k}{k^3}) \cdot e^{2-\frac{3k}{k}} = \frac{1}{k^2} \cdot e^{-1} \neq 0 \quad \wedge \quad f_k(3k) = (3k-k) \cdot e^{-1} = \frac{2k}{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{WP(3k/\frac{2k}{e})}}$$

Wertebereich :

$W =]-\infty; k]$



b)

Ortskurve der Hochpunkte $HP(2k/k)$; $k \in \mathbb{R}^+$

$$\left.\begin{matrix} x = 2k \\ y = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow k = \left.\frac{x}{2}\right\} \Rightarrow O(x) = y = \frac{1}{2}x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

c)

<u>Nullstellen:</u> <u>$x = k$</u> Steigung der Tangente t_{NS} in der NS: $m_{NS} = f_k'(k) = (2 - \frac{k}{k}) \cdot e^{2-\frac{k}{k}} = e$

<u>Wendestelle:</u> <u>$x = 3k$</u> Steigung der Tangente t_{WS} in der WS: $m_{WS} = f_k'(3k) = (2 - \frac{3k}{k}) \cdot e^{2-\frac{3k}{k}} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$t_{NS} \perp t_{WS} \Leftrightarrow m_{NS} \cdot m_{WS} = -1$

$\boxed{e \cdot (-\frac{1}{e}) = -1}$ D.h. unabhängig von $k \in \mathbb{R}^+$ stehen die beiden Tangenten senkrecht aufeinander.

d)

Uneigentliches Integral: $\int_k^\infty (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} dx$

Flächeninhalt: $A_k = \lim_{a \to \infty} A_k(a)$

$$A_k(a) = \int_k^a (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} dx$$

$$\int (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} dx = [(x-k)(-ke^{2-\frac{x}{k}})] - \int -ke^{2-\frac{x}{k}} dx = [(k^2 - kx) \cdot e^{2-\frac{x}{k}}] + [-k^2 \cdot e^{2-\frac{x}{k}}] = [-kx \cdot e^{2-\frac{x}{k}}]$$

$u = x - k \quad u' = 1 \quad v' = e^{2-\frac{x}{k}} \quad v = -ke^{2-\frac{x}{k}}$

$$A_k(a) = [-kx \cdot e^{2-\frac{x}{k}}]_k^a = (-ka \cdot e^{2-\frac{a}{k}}) - (-k^2 \cdot e^1)$$

$\underline{\underline{\lim_{a \to \infty} A_k(a) = k^2 \cdot e^1}}$ denn $\lim_{a \to \infty} -ka \cdot e^{2-\frac{a}{k}} = 0 \quad (\lim_{a \to \infty} e^{2-\frac{a}{k}} = 0)$

<u>Aufgabe A3</u>

a)

<u>Randverhalten:</u>

$f_k : f_k(x) = (x^2 + k) \cdot e^x$

$\boxed{x \to \infty}$

$$\left.\begin{matrix} (x^2 + k) \to \infty \\ e^x \to \infty \end{matrix}\right\} \quad f_k(x) \to \infty$$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\left.\begin{matrix} (x^2 + k) \to \infty \\ e^x \downarrow 0 \end{matrix}\right\} \quad f_k(x) \downarrow 0$$

$f_k(x) = (x^2 + k) \cdot e^x \quad f_k'(x) = (x^2 + 2x + k) \cdot e^x \quad f_k''(x) = (x^2 + 4x + k + 2) \cdot e^x \quad f_k'''(x) = (x^2 + 6x + k + 6) \cdot e^x$

<u>Nullstellen:</u>

$x_{1/2} = \pm\sqrt{-k}$ nur für $k \le 0$

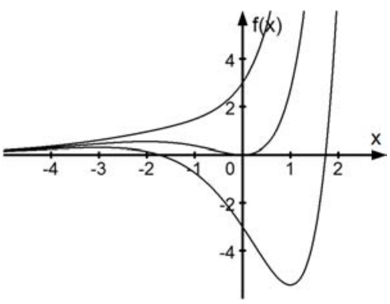
<u>Extrempunkte:</u>

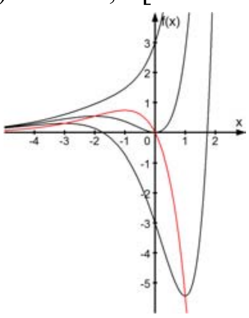
$HP(-1-\sqrt{1-k} / (2 + 2\sqrt{1-k}) \cdot e^{-1-\sqrt{1-k}})$ nur für $k \le 1$ $\quad TP(-1+\sqrt{1-k} / (2 - 2\sqrt{1-k}) \cdot e^{-1+\sqrt{1-k}})$ nur für $k \le 1$

<u>Wendepunkte:</u>

$WP_1(-2-\sqrt{2-k} / (6 + 4\sqrt{1-k}) \cdot e^{-2-\sqrt{2-k}})$ nur für $k \le 2$ $\quad WP_2(-2+\sqrt{2-k} / (6 - 4\sqrt{1-k}) \cdot e^{-2+\sqrt{2-k}})$ nur für $k \le 2$

<u>Wertebereich:</u> $W = [2 - 2\sqrt{1-k}) \cdot e^{-1+\sqrt{1-k}} ; \infty[$





b)

$TP(-1+\sqrt{1-k}\,/(2-2\sqrt{1-k})\cdot e^{-1+\sqrt{1-k}})$ nur für $k \leq 1$

$x=1 \Leftrightarrow 1=-1+\sqrt{1-k} \Leftrightarrow 2=\sqrt{1-k} \Leftrightarrow 4=1-k \Leftrightarrow \underline{\underline{k=-3}}$

$f_{-3}(1)=(1-3)\cdot e^{1} = \underline{\underline{-2e}} \approx -5{,}437$ $\underline{\underline{\text{Minimum}}}$

c)

$HP(-1-\sqrt{1-k}\,/(2+2\sqrt{1-k})\cdot e^{-1-\sqrt{1-k}})$ nur für $k \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{1-k} \\ y=(2+2\sqrt{1-k})\cdot e^{-1-\sqrt{1-k}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+1=-\sqrt{1-k} \Leftrightarrow -x-1=\sqrt{1-k} \Leftrightarrow (-x-1)^2=1-k \Leftrightarrow \underline{k=1-(-x-1)^2}$$

$\Rightarrow y=O(x)=(2+2\sqrt{1-(1-(-x-1)^2)})\cdot e^{-1-\sqrt{1-(1-(-x-1)^2)}})=(2+2(-x-1))\cdot e^{x} = \underline{\underline{(-2x)\cdot e^{x}}}$; $ID_{O(x)} =]-\infty;-1]$

d)

$g: g(x)=-2xe^{x};\quad x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=(-2x-2)\cdot e^{x} \quad g''(x)=(-2x-4)\cdot e^{x} \quad g'''(x)=(-2x-6)\cdot e^{x}$

NS: $x=0 \notin ID_g$; $HP(-1/\frac{2}{e})$; $WP(-2/\frac{4}{e^2})$

<u>Schnittpunkte von f und g:</u>

$g(x)=f(x) \Leftrightarrow -2xe^{x}=(x^2-3)e^{x} \Leftrightarrow 0=x^2+2x-3 \Leftrightarrow \underline{x_1=-3} \vee \underline{x_2=1}$ ($e^{x}\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$)

$\underline{\underline{S_1(-3/\frac{6}{e^3}) \quad S_2(1/-2e)}}$

e)

$g(x)=f(x) \Leftrightarrow -2xe^{x}=(x^2-3)e^{x} \Leftrightarrow 0=x^2+2x-3 \Leftrightarrow \underline{x_1=-3} \vee \underline{x_2=1}$ ($e^{x}\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$)

$$A=\int_{-3}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)e^{x}dx$$

$u=-x^2-2x+3 \quad u'=-2x-2 \quad v'=e^{x} \quad v=e^{x}$

$$A=[(-x^2-2x+3)e^{x}]_{-3}^{1}-\int_{-3}^{1}(-2x-2)e^{x}dx=[(-x^2-2x+3)e^{x}]_{-3}^{1}+\int_{-3}^{1}(2x+2)e^{x}dx$$

$u=2x+2 \quad u'=2 \quad v'=e^{x} \quad v=e^{x}$

$$A=[(-x^2-2x+3)e^{x}]_{-3}^{1}+[(2x+2)e^{x}]_{-3}^{1}-\int_{-3}^{1}2e^{x}dx=[(-x^2-2x+3)e^{x}]_{-3}^{1}+[(2x+2)e^{x}]_{-3}^{1}-[2e^{x}]_{-3}^{1}$$

$$A=[(3-x^2)e^{x}]_{-3}^{1}=2e-(-\frac{6}{e^3})=\underline{\underline{2e+\frac{6}{e^3}}}\approx\underline{\underline{5{,}735\text{ FE}}}$$