Aufgabe A7

a)

$f_k(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}k^2x^2 \quad f_k{}'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}k^2x \quad f_k{}''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}k^2 \quad f_k{}'''(x) = -\frac{8}{3}x$

$\underline{\text{Wendepunkte:}} \quad f_k{}''(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k{}'''(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}k^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = -k} \quad \vee \quad \underline{x_2 = k}$

$f_k{}'''(-k) = \frac{8}{3}k > 0 \qquad f_k{}'''(k) = -\frac{8}{3}k < 0 \qquad (k > 0)$

$f_k(-k) = -\frac{1}{9}(-k)^4 + \frac{2}{3}k^2 \cdot (-k)^2 = \frac{5}{9}k^4 \qquad f_k(k) = -\frac{1}{9}k^4 + \frac{2}{3}k^2 \cdot k^2 = \frac{5}{9}k^4$

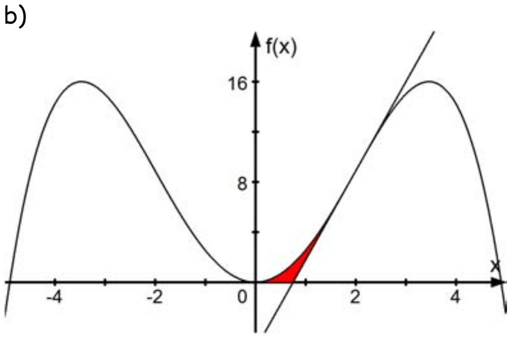
$\underline{\underline{WP_1(-k / \frac{5}{9}k^4)}} \qquad \underline{\underline{WP_2(k / \frac{5}{9}k^4)}}$ Wendepunkt WP_2 liegt im 1.Quadranten, denn es gilt k>0.

$\underline{\text{Wendetangente in } WP_2:} \quad t_k(x) = m \cdot x + b$

$\underline{m = f_k{}'(k) = -\frac{4}{9}k^3 + \frac{4}{3}k^2 \cdot k = \underline{\frac{8}{9}k^3}} \qquad \frac{5}{9}k^4 = \frac{8}{9}k^3 \cdot k + b \quad \Rightarrow \quad b = \underline{-\frac{1}{3}k^4}$

$\underline{\underline{t_k(x) = \frac{8}{9}k^3x - \frac{1}{3}k^4}}$

b)



$f_k(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}k^2x^2 \quad t_k(x) = \frac{8}{9}k^3x - \frac{1}{3}k^4$

$\underline{\text{Integrationsgrenzen:}}$

1. $x = 0$
2. NS der Wendetangente: $x = \frac{3}{8}k$
3. Schnittstelle von f_k und t_k: Wendestelle $x = k$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten (je nach Wahl der betrachteten Teilflächen) den Flächeninhalt zu berechnen.:

$A(k) = A_1(k) - A_2(k)$

$A_1(k) = \int_0^k f_k(x)dx = [-\frac{1}{45}x^5 + \frac{2}{9}k^2x^3]_0^k = (-\frac{1}{45}k^5 + \frac{2}{9}k^2 \cdot k^3) - 0 = \underline{\frac{1}{5}k^5}$

$A_2(k) = \int_{\frac{3}{8}k}^{k} t_k(x)dx \quad \text{bzw.} \quad A_2(k) = \frac{1}{2} \cdot (k - \frac{3}{8}k) \cdot \frac{5}{9}k^4 = \underline{\frac{25}{144}k^5}$

$A(k) = \frac{1}{5}k^5 - \frac{25}{144}k^5 = \underline{\underline{\frac{19}{720}k^5}}$

$\underline{k = 2}: \quad A(2) = \frac{19}{720} \cdot 2^5 = \underline{\underline{\frac{38}{45}}}$

c)

$t_k(x) = \frac{8}{9}k^3x - \frac{1}{3}k^4$

$t_2(x) = \frac{64}{9}x - \frac{16}{3}$

$V = \pi\int_0^{\frac{3}{4}} (\frac{64}{9}x - \frac{16}{3})^2 dx = \pi\int_0^{\frac{3}{4}} (\frac{4096}{81}x^2 - \frac{2048}{27}x + \frac{256}{9})dx = \pi[\frac{4096}{243}x^3 - \frac{1024}{27}x^2 + \frac{256}{9}x]_0^{\frac{3}{4}} = \pi\frac{64}{9} - 0 = \underline{\underline{\pi\frac{64}{9} \approx 22{,}34\text{VE}}}$