Lösungen zu den Stochastik-ÜA

Lösung Aufgabe S1

a)
X: Anzahl der richtig beantworteten Fragen
X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$, $p \geq 0,70$

$\mu = E(X) = n \cdot p \geq 35$ Man erwartet, dass der Kandidat mindestens 35 richtig beantwortet.

$P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 1 - B_{50;0,7}(X \leq 35) = 1 - F_{50;0,7}(35) = 1 - 0,55317 = 0,44683 = \underline{\underline{48,68\,\%}}$

Tabelle: $F_{50;0,7}(35) = 0,55317$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 48,68% beantwortet ein geeigneter Kandidat mehr als 35 Fragen richtig.

b) (1)
X: Anzahl der richtig beantworteten Fragen
p Wahrscheinlichkeit für "nicht geeignet"
X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$, $p < 0,70$ (für die Berechnung wird 0,7 verwendet)

$P(X > k) = B_{50;\,0,7}(X > k) \leq 0,05$
$B_{50;\,0,7}(X > k) = 1 - B_{50;\,0,7}(X \leq k) \leq 0,05$
$B_{50;\,0,7}(X \leq k) \geq 0,95$
$k \geq 40$

k sollte mindestens 40 betragen.

b) (2)
X: Anzahl der richtig beantworteten Fragen
X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$, $p = 0,5$
$B_{50;\,0,5}(X \geq 40) = 1 - B_{50;\,0,5}(X \leq 39) = 1 - 0,99999 = 0,00001 \approx 0$

Die Anerkennung als Kandidat ist nahezu unmöglich.

c)
X: Anzahl der richtig beantworteten Fragen
$p = 0,7$
Mit der Tschebyscheffungleichung für binomialverteilte Zufallsgrößen (Gesetz der großen Zahlen) soll gelten:
$P(|h_n - p| < 0,1) \geq 1 - \dfrac{p \cdot q}{n \cdot c^2} > 0,9$

$1 - \dfrac{p \cdot q}{n \cdot c^2} > 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \dfrac{0,7 \cdot 0,3}{n \cdot 0,1^2} > 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1 > \dfrac{0,7 \cdot 0,3}{n \cdot 0,1^2} \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{0,7 \cdot 0,3}{0,1 \cdot 0,1^2} = 210$

Es müssen mehr als 210 Fragen gestellt werden.

d)
Erste Erklärungsmöglichkeit:
$\underline{\underline{\binom{6}{3}}} = 20$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung
(3 der 6 Plätze müssen für Männer bzw. Frauen ausgewählt werden.)

Zweite Erklärungsmöglichkeit:
6! Möglichkeiten der Anordnung der 6 Personen
3! "gleiche" Möglichkeiten für die Frauen und 3! "gleiche" Möglichkeiten für die Männer
Also $\underline{\underline{\dfrac{6!}{3! \cdot 3!}}} = 20$ Möglichkeiten (Permutationen ohne Wiederholung)

Lösung Aufgabe S2

a)

- Fragen nicht gleichwertig
- Nicht ausreichend viele Fragen vorhanden
- Keine unabhängige Auswahl der Fragen

b)

(1)

$P(E_1) = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \underline{\underline{0{,}04\,\%}}$

$|S| = 10^{10}$ Möglichkeiten insgesamt, denn bei jeder Frage kann eine Frage aus einem der 10 Gebiete gezogen werden.

$|E_1| = 10!$ 1. Frage 10 Gebiete möglich, 2. Frage 9 Gebiete möglich......, denn jede Frage soll aus einem anderen Gebiet sein.

(2)

$P(E_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09 = \underline{\underline{9\,\%}}$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Frage aus dem Gebiet "Politik" kommt beträgt 0,1.
Wahrscheinlichkeit, dass eine Frage nicht aus dem Gebiet "Politik" kommt beträgt 0,9.
Die Wahrscheinlichkeit für alle Fragen außer Nr. 8 und Nr.10 beträgt 1, denn die Fragen können aus jedem beliebigen Gebiet kommen.

(3)

X Anzahl der Fragen aus dem Gebiet Sport
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}1$

$P(E_3) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$P(E_3) = 1 - \binom{30}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{30} - \binom{30}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{29} = 1 - 0{,}9^{30} - 30 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{29} \approx 0{,}8163 \approx \underline{\underline{81{,}63\,\%}}$

(Wahrscheinlichkeit könnte auch mit Hilfe der Tabelle abgelesen werden.)

(4)

Wenn die zwölfte die dritte Frage aus dem Gebiet Politik ist, dann müssen unter den ersten 11 Fragen genau 2 Fragen aus dem Gebiet Politik gewesen sein. Die nächste Frage, d.h. die zwölfte Frage ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 aus dem Gebiet Politik.
X Anzahl der Fragen aus dem Gebiet Politik
X ist binomialverteilt mit $n = 11$ und $p = 0{,}1$

$P(X = 2) = \binom{11}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^9 = 55 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^9 \approx 0{,}2131$

$P(E_4) = P(X = 2) \cdot 0{,}1 \approx 0{,}02131 \approx \underline{\underline{2{,}13\,\%}}$

c)

Wetten lohnt sich erst, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis mehr als 50% beträgt.
X Anzahl der Fragen aus dem Gebiet "Sport"
X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}1$

E: Mindestens eine Sportfrage unter n Fragen
$\overline{E}$: Keine Sportfrage unter n Fragen

$P(E) = P(X \geq 1) > 0{,}5$

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n > 0{,}5$

$$1 - 0{,}9^n > 0{,}5$$
$$0{,}5 > 0{,}9^n$$
$$\ln 0{,}5 > n \cdot \ln 0{,}9$$
$$\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx \underline{6{,}58 < n}$$

$\underline{\underline{\text{Mindestens 7 Fragen}}}$ sollte man stellen, damit sich das Wetten lohnt.

Lösung Aufgabe S3

a)

(1)
Für jede einzelne Frage gilt (Raten vorausgesetzt):

A: Antwort richtig $P(A)=\frac{1}{4}$

Er scheidet bis zur vierten Frage nicht aus, wenn er die drei ersten Fragen richtig rät.

$P(E_1)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\underline{\underline{1{,}5625\,\%}}$

(2)
$E_2=\{A\overline{A};\ \overline{A}\}$ Einfach am Baum zu erkennen (2 Pfade!).

$P(E_2)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{16}=\underline{\underline{43{,}75\,\%}}$

(3)
$E_3=\{A_I A_{II}\overline{A}_{III}\}$

$P(E_3)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1=\underline{\underline{3{,}5\,\%}}$

b)
Entweder kommt eine Frage aus den 7 Gebieten, die er sicher beherrscht oder
es kommt eine Frage aus den 3 restlichen Gebieten, dann wählt er den "Halbe-Halbe-Joker"
und rät anschließend. (Ein Baum kann hier hilfreich sein)

$P(E_1)=\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{85\,\%}}$

$$E_2=\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{Frage aus 7G mit sicherem Wissen und Frage aus 3G mit Joker und Raten}\\ \bullet\ \text{Frage aus 7G mit sicherem Wissen und Frage aus 7G mit sicherem Wissen}\\ \bullet\ \text{Frage aus 3G mit Joker und Raten und Frage aus 3G mit Raten}\\ \bullet\ \text{Frage aus 3G mit Joker und Raten und Frage aus 7G mit sicherem Wissen}\end{array}\right\}$$

$$P(E_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}=2\cdot\frac{21}{200}+\frac{49}{100}+\frac{9}{800}=\frac{569}{800}=\underline{\underline{71{,}125\,\%}}$$

Lösung Aufgabe S4

Es muss ein rechtsseitiger Signifikanztest betrachtet/verwendet werden.

X: Anzahl der Zuschauer, die der Quizshow die Höchstnote verleihen.
X ist binmialverteilt mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0,25$

Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}25$ Gegenhypothese: H_1: $p > 0{,}25$

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $K = \{ g_r ; \ldots ; 500\}$

$P(X \geq g_r) \leq 0{,}05$
$1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0{,}05$
$0{,}95 \leq P(X \leq g_r - 1)$
$0{,}95 \leq B_{500;0,25}(X \leq g_r - 1) = B_{500;0,25}(X \leq k)$
Näherung mit Moivre-Laplace:
Voraussetzung $n \cdot p \cdot q = 500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 93{,}75 > 9$ erfüllt
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}25 = 125$
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{93{,}75}$

$$B_{500;0,25}(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) = \Phi\left(\frac{k - 124{,}5}{\sqrt{93{,}75}}\right) \geq 0{,}95$$

Tafelwerk S.51

$$\frac{k - 124{,}5}{\sqrt{93{,}75}} \geq 1{,}65$$

$g_r - 1 = k \geq 140{,}48$
$\underline{\underline{g_r \geq 143}}$ Ablehnungsbereich: $K = \{143; \ldots ; 500\}$

Entscheidungsregel:
Wenn 143 oder mehr Zuschauer nicht die Höchstnote verleihen, dann muss die Nullhypothese abgelehnt werden.

b)
Gesucht ist $B_{500;\,0,3}(X \leq 141)$
$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}3 = 150$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{105}$

$$B_{500;\,0,3}(X \leq 141) \approx \Phi\left(\frac{141 - 150 + 0{,}5}{\sqrt{105}}\right) = \Phi(-0{,}829) = 1 - \Phi(0{,}829)$$
$$= 1 - 0{,}79673 = 0{,}20327 = \underline{\underline{20{,}327\,\%}}$$