Aufgabe G3 a)

$$g_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Punktprobe: } P_3 \in g_1\,?$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{5}{3} \\ \lambda = \frac{7}{4} \end{matrix}\right\} \quad \text{D.h. } P_3 \notin g_1, \text{ denn es gibt kein } \lambda \in \mathbb{R}, \text{welches die Gleichung erfüllt.}$$

b)

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Prüfen auf Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & - & r & = & 2{,}5 & - & 3s \\ 0 & + & 2r & = & 4 & - & 2s \\ 3 & + & 2r & = & 0 & + & 5s \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -r & + & 3s & = & 0{,}5 \\ 2r & + & 2s & = & 4 \\ 2r & - & 5s & = & -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 8s & = & 5 \\ s & = & -2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s & = & \frac{5}{8} \\ s & = & -2 \end{matrix}\right\} \text{ Widerspruch } g \cap k = \emptyset$$

2. Prüfen auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t = \frac{1}{3} \\ t = -1 \\ t = 0{,}4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ g und k verlaufen nicht parallel.}$$

$$\boxed{\text{g und k liegen windschief zueinander.}}$$

c)

Parameterform:

$$E_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$E_1: \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Koordiantenform:

$$E_1: \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -6$$

$$\text{Normalenvektor von } E_1: \quad \overrightarrow{n_1} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{n_1} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -21-(-20) \\ 16-14 \\ -10-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$g_{AB}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E_2: \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \qquad E_{x_1-x_3}: \quad x_2 = 0$$

Durchstoßpunkt D von g_{AB} mit $E_{x_1-x_3}$

$$\left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_2 = 2 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-3/0/9)$$

Schnittpunkt S und Schnittwinkel α von g_{AB} und E_2

$$(1+2\lambda) - 2 \cdot (2+\lambda) - 2 \cdot (3-3\lambda) = 6 \Rightarrow -9 + 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2{,}5$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(6/4{,}5/-4{,}5) \quad \sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{9}} = \frac{|2-2+6|}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = 32{,}31°$$

e)

Bedingung für gleichseitiges Dreieck:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

Bedingung für gleichschenliges Dreieck:

Entweder $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ oder $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ oder $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$

Bedingung für rechtwinkliges Dreieck:

Entweder $\alpha = 90°$ $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = 0$ oder $\beta = 90°$ $\overrightarrow{BA} * \overrightarrow{BC} = 0$ oder $\gamma = 90°$ $\overrightarrow{CA} * \overrightarrow{CB} = 0$