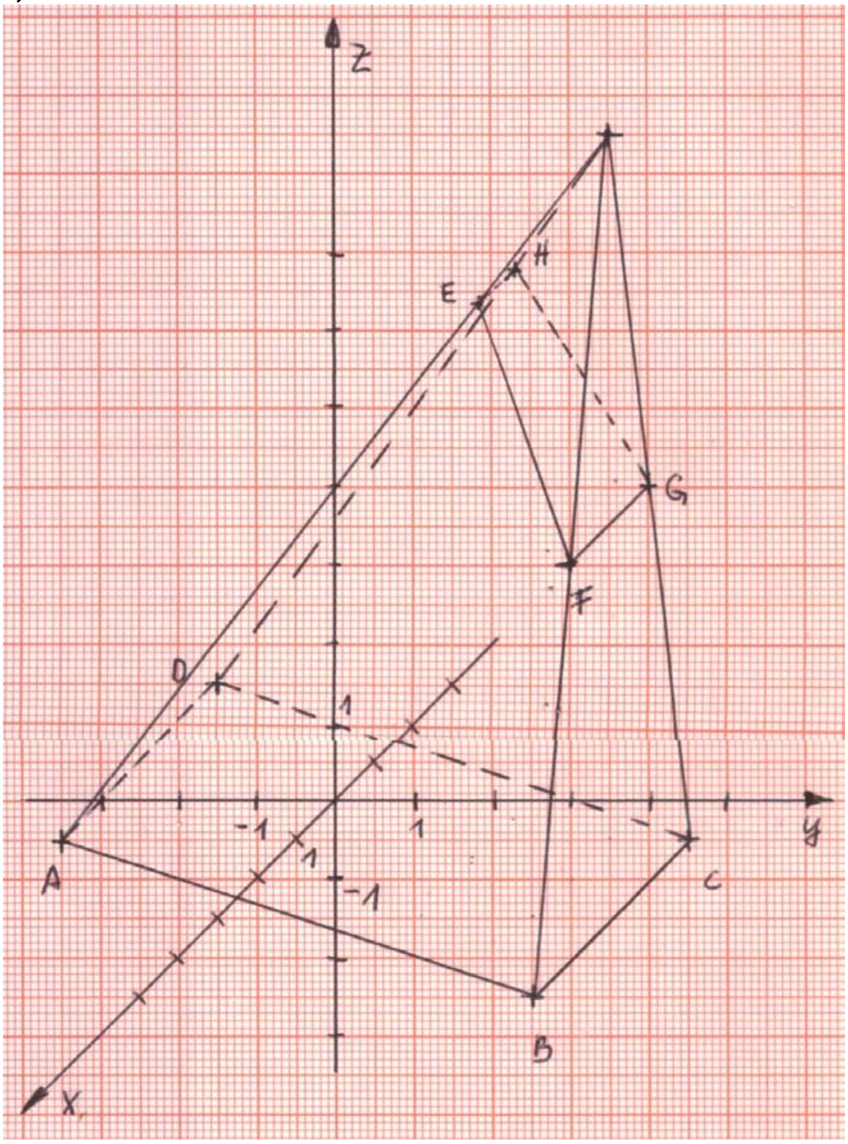
Aufgabe G2

a)



b)

$A(3/-2/1)\quad B(3/4/-1)\quad C(-1/4/-1)\quad D(-1/-2/1)\quad S(1/4/9)$

Der Diagonalenschnittpunkt ist beim Rechteck der Mittelpunkt M der beiden Diagonalen. Damit gilt:

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})\quad \text{bzw.}\quad \vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$$

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{bzw.}\quad \vec{m}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \Rightarrow \underline{\underline{M(1/1/0)}}$$

Die Pyramide ist gerade, wenn $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{DB}$ und $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{DB}\quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MS}*\overrightarrow{DB}=0\quad \text{und}\quad \overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AC}\quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MS}*\overrightarrow{AC}=0$$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}=0\cdot4+3\cdot6+9\cdot(-2)=0+18-18=0\quad\Rightarrow\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{DB}$$

$$\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}=0\cdot(-4)+3\cdot6+9\cdot(-2)=0+18-18=0\quad\Rightarrow\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AC}$$

[Andere Variante: Pyramide ist gerade, wenn die Kanten SA, SB, SC und SD gleichlang sind.

z.zg.: $|\overrightarrow{SA}|=|\overrightarrow{SB}|=|\overrightarrow{SC}|=|\overrightarrow{SD}|$]

c)

$A(3/-2/1)\quad B(3/4/-1)\quad C(-1/4/-1)\quad D(-1/-2/1)\quad S(1/4/9)$

$$\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\6\\-2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{Volumen}:\quad V=\frac{1}{3}\cdot A_{Rechteck}\cdot h\quad h=\left|\overrightarrow{MS}\right|\quad A_{Rechteck}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\quad V=\frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MS}\right|$$

$$A_{Rechteck}=\sqrt{36+4}\cdot\sqrt{16}=4\cdot\sqrt{40}\quad h=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{40}\cdot 3\sqrt{10}=\underline{\underline{80VE}}$$

d)

$$E_2:\quad \vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\6\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}\quad \text{bzw.}\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$E_3:\quad \vec{x}=\overrightarrow{OC}+\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CS}\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-6\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix}\quad \text{bzw.}\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$g_{AS}:\quad \vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AS}\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\quad \text{bzw.}\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$$

e)

$$E_1=E_{EFGH}:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\quad g_{AS}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\quad \left|\vec{n}_{E_1}\right|=\sqrt{5}\quad \vec{n}_{E_2}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\quad \left|\vec{n}_{E_2}\right|=\sqrt{10}$$

$$\cos(\angle(E_1,\ E_2))=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\quad\Rightarrow\underline{\underline{\angle(E_1,\ E_2)=45^\circ}}$$

$$\sin(\angle(E_1,\ g_{AS}))=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{130}}\quad\Rightarrow\underline{\underline{\angle(E_1,\ g_{AS})=61,29^\circ}}$$

f)

$$\vec{n}_{E_1}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad E_1:\quad 2x_2+x_3=d\quad \text{F einsetzen:}\quad 2\cdot 4+4=12=d$$

$$\underline{\underline{E_1:\quad 2x_2+x_3=12}}$$

g)

$$g_{AS}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\quad E_1:\quad 2x_2+x_3=12$$

$$\vec{x}_{g_{AS}}\ \text{in}\ E_1\ \text{einsetzen:}\quad 2\cdot(-2+3\lambda)+(1+4\lambda)=12\quad\Rightarrow\quad -3+10\lambda=12\quad\Rightarrow\quad \underline{\lambda=1,5}$$

$$\overline{OE}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+1,5\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5\\2,5\\7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \text{Schnittpunkt E}:\quad \underline{\underline{E(1,5/2,5/7)}}$$

h)

$E(1,5/2,5/7)\quad F(2/4/4)\quad G(0/4/4)\quad H(0,5/2,5/7)$

$$\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}0,5\\1,5\\-3\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{HG}=\begin{pmatrix}-0,5\\1,5\\-3\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{EH}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{FG}\parallel\overrightarrow{EH}\quad \text{, denn für } k=-2 \text{ gilt } \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\\ \text{Es gibt keine Zahl } k\in\mathbb{R}\text{, so dass } \overrightarrow{EF}=k\cdot\overrightarrow{HG} \text{ erfüllt ist}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{EFGH ist ein Trapez}$$

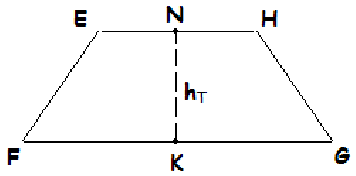
$$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{0,25+2,25+9}=\sqrt{11,5}=\left|\overrightarrow{HG}\right|\quad\Rightarrow\quad \text{EFGH ist ein gleichschenkliges Trapez.}$$

i)

$$A(3/-2/1)\quad E(1,5/2,5/7)\quad S(1/4/9)\quad \overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-1,5\\4,5\\6\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1,5\\4,5\\6\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\quad\left.\begin{array}{l}t=0,75\\t=0,75\\t=0,75\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1,5\\4,5\\6\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AE}\right|:\left|\overrightarrow{AS}\right|=3:4\quad\text{bzw.}\quad\left|\overrightarrow{AE}\right|:\left|\overrightarrow{ES}\right|=3:1$$

j)



Volumen der Pyramide EFGHS:

$$V_P=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h\qquad G=A_{Trapez}\qquad h_P=d(S;E_1)$$

Da EFGH ein gleichschenkliges Trapez ist, bildet die Strecke NK die Höhe, wenn N und K die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten sind.

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH})=\begin{pmatrix}1\\2,5\\7\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})=\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{KN}=\begin{pmatrix}0\\-1,5\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad h_T=\left|\overrightarrow{KN}\right|=\sqrt{11,25}\quad \overrightarrow{EH}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \left|\overrightarrow{EH}\right|=1\quad \overrightarrow{FG}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \left|\overrightarrow{FG}\right|=2$$

$$G=A_{Trapez}=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\sqrt{11,25}=\underline{\frac{3}{2}\sqrt{11,25}}\qquad h_P=d(S;E_1)=\frac{|2\cdot4+9-12|}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{5}{\sqrt{5}}}$$

$$V_P=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{11,25}\cdot\frac{5}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{3,75VE}}$$

Volumen des Pyramidenstumpfes ABCDEFGH

$$V_{ABCDS}=V_P+V_{P-stumpf}\quad\Rightarrow\quad V_{P-stumpf}=80VE-3,75VE=\underline{\underline{76,25VE}}$$

k)

$$\left.\begin{array}{ll}E_1: & 2x_2+x_3=12\\ E_1: & \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\\ E_{X_1-X_2}: & x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_3=4+2\mu\\x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=4+2\mu\Rightarrow\underline{\mu=-2}$$

Schnittgerade von E_1 und $E_{X_1-X_2}$:

$$g:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Schnittwinkel α zwischen E_1 und $E_{X_1-X_2}$:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\alpha=63,43°}}$$