Aufgabe G1 1A

a) $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\4\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-k-4\\k^2+3\end{pmatrix}$ Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-k-4\\k^2+3\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}13\\-5\\11\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Richtungsvektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{n}$ Normalenvektor von E_{13}

c)

$A(2-s|\sqrt{s}|-2) \quad B(s|3\sqrt{s}|s^3)$

$$\overrightarrow{m_s}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\cdot(\begin{pmatrix}2-s\\\sqrt{s}\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s\\3\sqrt{s}\\s^3\end{pmatrix})=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\sqrt{s}\\s^3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{s}\\\frac{1}{2}s^3-1\end{pmatrix}$$

$M_s(1/2\sqrt{s}/\tfrac{1}{2}s^3-1) \Rightarrow$ zwei bel. Punkte $M_1(1/2/-\frac{1}{2})$ $M_4(1/4/31)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_4}=\begin{pmatrix}0\\2\\31\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\63\end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\31\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\4\\63\end{pmatrix}$$

$M_{16}(1/8/2047)$

$$\begin{pmatrix}1\\8\\2047\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\31\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\4\\63\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{für jedes }\lambda\text{ wahr}\\\lambda=1\\\lambda=32\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{Widerspruch:}\\\text{Die Mittelpunkte liegen nicht auf einer Gerade.}\end{bmatrix}$$

d)

Ebene $E\perp h$; $P(2|-\frac{3}{4}|-4)\in E \Rightarrow E: \quad E: \; -3x_1+4x_2+10x_3=-49$

$h\cap E$

$$-3(1-3\lambda)+4(4\lambda)+10(3+10\lambda)=-49 \Leftrightarrow 27+125\lambda=-49 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{76}{125}$$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt: $S(\frac{353}{125}/-\frac{304}{125}/-\frac{77}{25})$ Gesuchte Gerade geht durch P und S: $\underline{\underline{g: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3/4\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}103/125\\-841/500\\23/25\end{pmatrix}}}$

1B a)

$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\-4\\0,5\end{pmatrix}$; $Q(1/2/3)\in g$; $P(-2|2|5)$ $P\notin g$ Spannvektoren: $\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\0,5\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$E: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\-4\\0,5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ Normalenvektor von E: $\begin{pmatrix}-3\\-4\\0,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\4,5\\-12\end{pmatrix}=0,5\cdot\begin{pmatrix}-16\\9\\-24\end{pmatrix}$

$E: \; -16x_1+9x_2-24x_3=d \Leftrightarrow -16+18-72=-70=d$

$\underline{\underline{E: \; -16x_1+9x_2-24x_3=-70}}$

b)

x_2x_3-Ebene: $x_1=0$ Parallele zu x_2x_3-Ebene: $x_1=d$ $Q(-5|0|0)\in E \Rightarrow \underline{\underline{E: \; x_1=-5}}$

$P(-5/0/0)$; $Q(-5/1/0)$; $R(-5/1/1)$ $\underline{\underline{E: \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}}$

c)

$E: \; -3x_1-4x_2+0,5x_3=0$

$P(0/0/0)$; $Q(2/1/20)$; $R(-1/1/2)$ $\in E$; P,Q,R liegen nicht auf einer Gerade

$E: \vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\20\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ (Spannvektoren: $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ $\vec{v}=\overrightarrow{PR}$)

1C

$A\left(2\middle|3\middle|-1\right)\qquad B\left(4\middle|-1\middle|5\right)\qquad P\left(3\middle|1\middle|2\right)\qquad g_{AB}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$

$P\in g_{AB}\,?\quad \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\lambda=0,5\\\lambda=0,5\\\lambda=0,5\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow P\in g_{AB}\Rightarrow$ Die drei Punkte liegen auf einer Gerade.

1D a)

Bedingung für Parallelogramm: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\ \vee\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} & \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix} & \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \text{ABCD ist ein Parallelogramm.}$$

b)

Das Parallelogramm ABCD ist ein Rechteck $\Leftrightarrow\ \alpha=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=90°\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=0$

$\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}=-12+12-6=-6\neq 0\ \Rightarrow$ ABCD bilden kein Rechteck.

c)

<u>Flächeninhalt :</u>

$$A_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6-(-12)\\-12-(-6)\\-12-12\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}18\\-6\\-24\end{pmatrix}\right|=\sqrt{18^2+(-6)^2+(-24)^2}=\underline{\underline{\sqrt{936}FE\approx 30,59FE}}$$

1E

$A\left(3\middle|7\middle|2\right)\ ,\quad B\left(-1\middle|5\middle|1\right)\ ,\quad C\left(2\middle|3\middle|0\right)$

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{21}\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{21}\quad \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{14}$

$\Rightarrow\ \triangle$ABC ist gleichschenklig, da $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$ aber $\left|\overrightarrow{AB}\right|\neq\left|\overrightarrow{BC}\right|$

1F

a)
g und h schneiden sich in S(21/-1/14)
g und k sind windschief zueinander
h und k sind windschief zueinander

b)
g und h schneiden sich in S(1/2/5)
g und k sind windschief zueinander
h und k sind parallel zueinander, aber nicht identisch

1G

a) (1)

$P\left(0\middle|1\middle|2\right)\quad Q\left(2\middle|0\middle|4\right)\quad R\left(4\middle|8\middle|0\right)$

$g_{PQ}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ Punktprobe: $\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\ \left.\begin{matrix}\Rightarrow\lambda=2\\\Rightarrow\lambda=-7\\\Rightarrow\lambda=-1\end{matrix}\right\}R\notin g_{PQ}$

$\Rightarrow$ P, Q und R legen eindeutig eine Ebene fest.

a) (2)

$P\left(1\middle|1\middle|1\right)\quad Q\left(2\middle|2\middle|3\right)\quad R\left(10\middle|4\middle|6\right)\quad \overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$

P, R und Q legen eine Ebene fest, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ nicht parallel sind.

$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{PR}\ \Leftrightarrow$ Es gibt ein $k\in\mathbb{R}$, so dass $k\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}$ gilt.

$k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}\ \left.\begin{matrix}\Rightarrow k=9\\\Rightarrow k=3\\\Rightarrow k=2,5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind nicht parallel.

D.h. P, R und Q legen eindeutig eine Ebene fest.

b) (1)

$$\text{Parameterfom}: \quad E_{PQR} = E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\7\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-14\\8-(-4)\\14-(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\12\\18\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{Koordinatenform}: \quad E_1: \quad -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \qquad \text{Hessesche Normalenform:} \quad E_1: \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} * (\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}) = 0$$

b) (2)

$$\text{Parameterfom}: \quad E_{PQR} = E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-6\\18-5\\3-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\13\\-6\end{pmatrix}$$

$$\text{Koordinatenform}: \quad E_2: \quad -x_1 + 13x_2 - 6x_3 = 6 \qquad \text{Hessesche Normalenform:} \quad E_2: \frac{1}{\sqrt{206}}\begin{pmatrix}-1\\13\\-6\end{pmatrix} * (\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = 0$$

c)

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-1\\13\\-6\end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix}k=2\\k=2/13\\k=-0,5\end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1 \neq k\cdot\vec{n}_2$$

$\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind verlaufen nicht parallel zueinander, d.h. sie schneiden sich in einer Gerade g.

$$\begin{matrix}E_1: & -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ E_2: & -x_1 + 13x_2 - 6x_3 = 6\end{matrix} \quad \left| \quad \begin{matrix} \\ \cdot(-2)\end{matrix}\right|+ \quad \Big\} \quad -24x_2 + 15x_3 = -4$$

$$\text{wähle } x_3 = t \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{8}t \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13(\frac{1}{6} + \frac{5}{8}t) - 6t - 6 = -\frac{23}{6} + \frac{17}{8}t$$

$$\text{Schnittgerade g}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-\frac{23}{6}\\\frac{1}{6}\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{17}{8}\\\frac{5}{8}\\1\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-\frac{23}{6}\\\frac{1}{6}\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}17\\5\\8\end{pmatrix}$$

1H a)

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \qquad E: \quad x_1 - 2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = 6$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\lambda - 2\cdot(2+\lambda) - 2\cdot(3-3\lambda) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6\lambda = 15 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda = 2,5} \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt}: \quad \underline{\underline{S(6/4,5/-4,5)}}$$

b)

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad E: \quad x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 - \lambda - 1 + 3\lambda - 3\cdot(1+\lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda = -3} \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt}: \quad \underline{\underline{S(5/-10/-2)}}$$

1J a)

$$P(2|-1|2) \quad R(0|0|0) \quad E: \quad 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 = 6$$

$\underline{\text{Abs tan d}:}$

$$d(E,\ P) = \frac{|2\cdot 2 + (-1) + 2\cdot 2 - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}\text{LE}$$

$$d(E,\ R) = \frac{|-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2\,\text{LE}}}$$

b)

$$P(1|0|1) \quad R(0|0|0) \quad E: \quad x_1 - x_2 + x_3 = 9$$

$\underline{\text{Abs tan d}:}$

$$d(E,\ P) = \frac{|1+1-9|}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{3}}}}\text{LE} \approx 4,04\,\text{LE}$$

$$d(E,\ R) = \frac{|9|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{3\sqrt{3}\,\text{LE}}} \approx 5,2\,\text{LE}$$