

Vorbereitung für die Abiturprüfung (GK). Lösungen

Inhaltsverzeichnis

1 Ganzrationale Funktionen	2
1.1 Funktionsuntersuchung	2
1.1.1 Aufgabe	2
1.1.2 Aufgabe	2
1.1.3 Aufgabe	2
1.2 Integralrechnung	3
1.2.1 Aufgabe	3
1.2.2 Aufgabe	3
1.2.3 Aufgabe	3
1.3 Funktionenschar	3
1.3.1 Aufgabe	3
1.4 Vermischte Aufgaben	3
1.4.1 Aufgabe	3
1.4.2 Aufgabe	4
1.4.3 Aufgabe	5
1.4.4 Aufgabe	6
2 e-Funktionen	8
2.1 Funktionsuntersuchung	8
2.1.1 Aufgabe	8
2.1.2 Aufgabe	8
2.1.3 Aufgabe	8
2.2 Integralrechnung	8
2.2.1 Aufgabe	8
2.3 Funktionenschar	8
2.3.1 Aufgabe	8
2.4 Vermischte Aufgaben	8
2.4.1 Aufgabe	8
2.4.2 Aufgabe	10
2.4.3 Aufgabe	12
2.4.4 Aufgabe	13
3 Stochastik	14
3.1 Vermischte Aufgaben	14
3.1.1 Aufgabe	14
3.1.2 Aufgabe	14
3.1.3 Aufgabe	14
3.1.4 Aufgabe	14
3.1.5 Aufgabe	14
3.1.6 Aufgabe	14
3.1.7 Aufgabe	15
3.1.8 Aufgabe	15
3.1.9 Aufgabe	15
3.1.10 Aufgabe	15
3.1.11 Aufgabe	17
4 Analytische Geometrie und Lineare Algebra	20
4.1 Punkte und Geraden	20
4.1.1 Aufgabe	20
4.1.2 Aufgabe	20
4.1.3 Aufgabe	20
4.1.4 Aufgabe	20
4.2 Ebenen	20
4.2.1 Aufgabe	20
4.2.2 Aufgabe	21
4.2.3 Aufgabe	21
4.3 Vermischte Aufgaben	21
4.3.1 Aufgabe	21
4.3.2 Aufgabe	22
4.3.3 Aufgabe	23

1 Ganzrationale Funktionen

1.1 Funktionsuntersuchung

1.1.1 Aufgabe

Lösung.

- a) NS: 3; 0,5; -4; $S_y(0; 6)$
b) NS: 0; ± 4 ; $\pm 2,5$; $S_y(0; 0)$
c) NS: 0; ± 3 ; $S_y(0; 0)$
d) NS: 0; $1 + \sqrt{13} \approx 4,61$; $1 - \sqrt{13} \approx -2,61$; $S_y(0; 0)$

□

1.1.2 Aufgabe

Lösung.

- a) $TP(\frac{2}{3}; -2\frac{26}{27})$; $HP(-4; 7\frac{1}{5})$; $WP(-1\frac{2}{3}; 2\frac{16}{135})$
b) $HP(0; 0)$; $TP_1(2; -2\frac{2}{3})$; $TP_2(-1; -\frac{5}{12})$; $WP_1(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{7}{9}}; \approx -1,53)$; $WP_1(\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{7}{9}}; \approx -0,22)$

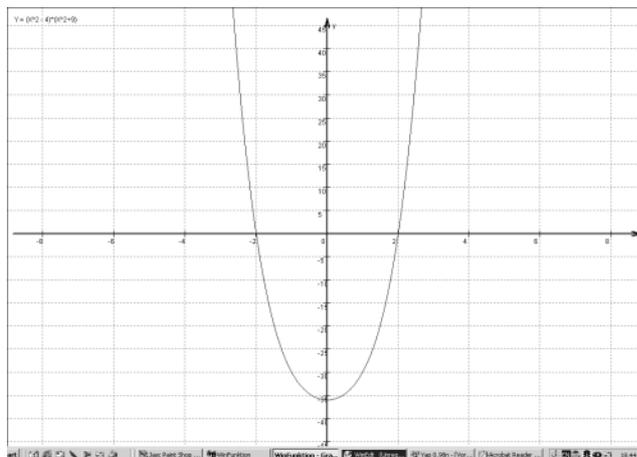
□

1.1.3 Aufgabe

Lösung.

a) Achsensymmetrisch zur y -Achse;

NS: 2; -2 EP: $TP(0; -36)$; keine WP;



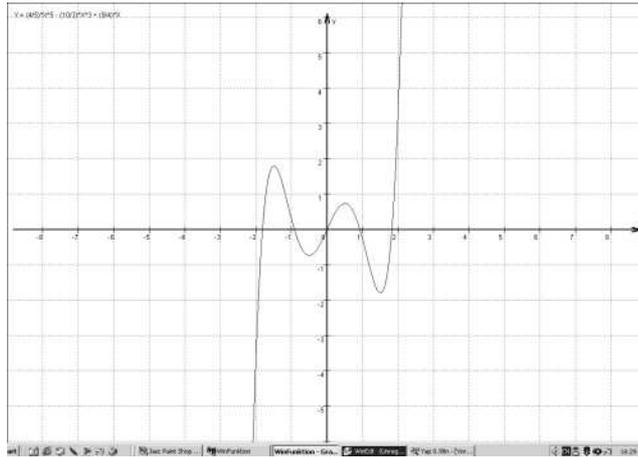
b) Punktsymmetrisch zum Ursprung;

$x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$;

NS: 0; $\approx \pm 0,92$; $\approx \pm 1,82$

EP: $HP_1(-1,5; 1,8)$; $HP_2(0,5; \approx 0,73)$; $TP_1(1,5; -1,8)$; $TP_2(-0,5; \approx -0,73)$

WP: $WP_1(0; 0)$; $WP_2(\approx -1,12; \approx 0,75)$; $WP_3(\approx 1,12; \approx -0,75)$



□

1.2 Integralrechnung

1.2.1 Aufgabe

Lösung. F_2 und F_3 sind Stammfunktionen zu f .

□

1.2.2 Aufgabe

Lösung.

a) -4 ; b) $32\frac{3}{4} FE = 32,75 FE$; c) $8\frac{1}{4} FE = 8,25 FE$

□

1.2.3 Aufgabe

Lösung.

a) Schnittstellen: $0; 2; 3,5$; $\mathcal{A} = 4\frac{169}{192} FE \approx 4,88 FE$;

b) Schnittstellen: $0; 2; -2; 1$; $\mathcal{A} = 9\frac{23}{30} FE \approx 9,76 FE$.

□

1.3 Funktionenschar

1.3.1 Aufgabe

Lösung.

a) NS: $0; 2a; -5a$; b) $TP(\approx 0,54; \approx -3,02)$; $HP(\approx -1,54; \approx 15,02)$; $WP(-0,5; 6)$ c) $\mathcal{A} = 407a^4 FE$. □

1.4 Vermischte Aufgaben

1.4.1 Aufgabe

Lösung.

$$a) f_t(x) = 0 \iff -\frac{t}{2}x(x^2 - tx - \frac{3t^2}{4}) = 0 \iff x_1 = 0 \vee x^2 - tx - \frac{3t^2}{4} = 0 \iff$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2}t, \quad x_3 = -\frac{1}{2}t$$

$$b) t = 2 \implies f_2(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x \implies$$

$$f_2'(x) = -3x^2 + 4x + 2 \qquad f_2''(x) = -6x + 4 \qquad f_2''' = -6$$

$$\text{Extrema: } f_2'(x) = 0 \iff -3x^2 + 4x + 3 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{13}{9}} \implies$$

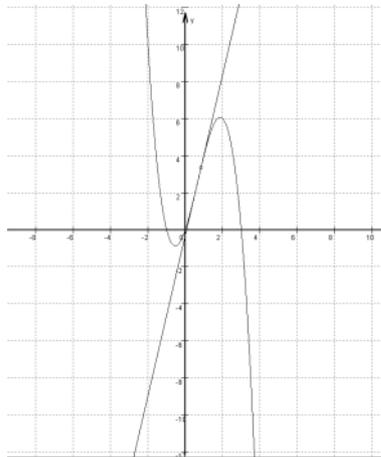
$$\text{mögliche Extremstellen bei } x_1 = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \approx 1,87; \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{13}}{3} \approx -0,54$$

Art und Lage:

$$f_2''\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right) = -2\sqrt{13} < 0 \implies x = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \text{ ist eine Hochpunktstelle}$$

$$f_2''\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) = 2\sqrt{13} > 0 \implies x = \frac{2-\sqrt{13}}{3} \text{ ist eine Tiefpunktstelle}$$

$$\implies H(1, 87; 6, 06) \text{ Hochpunkt und } T(-0, 54; -0, 88) \text{ Tiefpunkt.}$$



Wendepunkte: $f_2''(x) = 0 \iff -6x + 4 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ mögliche Wendestelle.

Art und Lage: $f_2'''(\frac{2}{3}) = -6 \neq 0 \implies x = \frac{2}{3}$ Wendestelle (Links-Rechts-Krümmungswechsel)

$$\implies W\left(\frac{2}{3}; 2, 59\right) \text{ Wendepunkt.}$$

Wendetangente: Punkt-Steigungsform $y - y_1 = m(x - x_1)$, wobei $W(x_1; y_1) = W(\frac{2}{3}; 2, 59)$ und $m = f_2'(\frac{2}{3}) \approx 4, 33$

$$\implies t(x) = 4, 33x - 0, 299.$$

Graphen:

c)

$$A_1(t) = \left| \int_{-\frac{t}{2}}^0 \left(-\frac{t}{2}x^3 + \frac{t^2}{2}x^2 + \frac{3t^3}{8}x\right) dx \right| = \left| \left[-\frac{t}{8}x^4 + \frac{t^2}{6}x^3 + \frac{3t^3}{16}x^2\right]_{-\frac{t}{2}}^0 \right| = \frac{7}{384}|t^5| = \frac{7}{384}t^5$$

$$A_2(t) = \left| \int_0^{\frac{3t}{2}} \left(-\frac{t}{2}x^3 + \frac{t^2}{2}x^2 + \frac{3t^3}{8}x\right) dx \right| = \left| \left[-\frac{t}{8}x^4 + \frac{t^2}{6}x^3 + \frac{3t^3}{16}x^2\right]_0^{\frac{3t}{2}} \right| = \frac{135}{384}|t^5| = \frac{135}{384}t^5$$

$$\implies A(t) = A_1(t) + A_2(t) = \frac{142}{384}t^5 = \frac{71}{192}t^5 \implies A(2) = 11\frac{5}{6}$$

d) Ganzrationale Funktion 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; f'(x) = 2ax + b;$

(1) $x = \frac{2}{3} =$ Wendestelle von $f_2 =$ Hochpunktstelle von $f \implies f'(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}a + b = 0 \iff b = -\frac{4}{3}a;$

(2) $(0; 0) \in G_f \implies c = 0$

Damit nimmt f die Form an: $f(x) = ax^2 - \frac{4}{3}ax$ und der Graph der Funktion schließt mit der 1. Achse eine Fläche von $\frac{128}{81}FE$ ein (wegen des Hochpunktes ist die Fläche oberhalb der 1. Achse, also positiv).

$$\int_0^{\frac{4}{3}} \left(ax^2 - \frac{4}{3}ax\right) dx = \frac{128}{81} \iff -\frac{32}{81}a = \frac{128}{81} \iff a = -4$$

$$\implies b = \frac{16}{3} \implies \text{Funktionsgleichung: } f(x) = -4x^2 + \frac{16}{3}. \quad \square$$

1.4.2 Aufgabe

Lösung.

a) Ganzrationale Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0 \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = f'(4) \\ f'(1) = 0 \\ \int_0^1 f(x) dx = \frac{11}{4} \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 48a + 8b + c \\ 3a + 2b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{1}{4} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{(geht durch den Ursprung)} \\ \text{(parallele Tangenten)} \\ \text{(Tangente parallel zur 1. Achse)} \\ \text{(Fläche)} \end{array}$$

$$a = 1; b = -6; c = 9; d = 0 \implies \text{Funktionsgleichung: } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

b) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_t(0) = 0: S_y(0; 0);$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f_t(x) = 0 \iff 0 = x(t^2x^2 - 6tx + 9) \iff 0 = x(tx - 3)^2$

$$\iff x_1 = 0, x_2 = x_3 = \frac{3}{t} \implies N_1(0; 0) = S_y; N_2\left(\frac{3}{t} 0\right)$$

Extrempunkte: $f'_t(x) = 3t^2x^2 - 12tx + 9$; $f''_t(x) = 6t^2x - 12t$; $f'''_t(x) = 6t^2$;

$f'_t(x) = 0 \iff 3t^2x^2 - 12tx + 9 = 0 \iff x_1 = \frac{1}{t}, x_2 = \frac{3}{t}$ mögliche Extremstellen;

$f''_t(\frac{1}{t}) = -6t < 0$, da $t > 0 \implies$ relative Hochpunktstelle bei $\frac{1}{t}$;

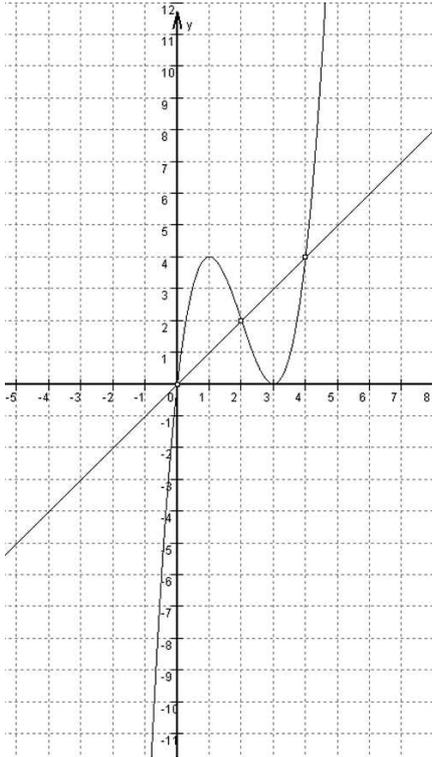
$f''_t(\frac{3}{t}) = 6t > 0$, da $t > 0 \implies$ relative Tiefpunktstelle bei $\frac{3}{t}$;

$\implies H_t(\frac{1}{t}; \frac{4}{t})$ relativer Hochpunkt und $T_t(\frac{3}{t}; 0) = N_2$ relativer Tiefpunkt.

Wendepunkte: $f''_t(x) = 0 \iff 6t^2x - 12t = 0 \iff x = \frac{2}{t}$;

$f'''_t(\frac{2}{t}) = 6t^2 \neq 0 \implies W_t(\frac{2}{t}; \frac{2}{t})$ Wendepunkt.

Graph G_1 von $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



c) $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

$$\mathcal{A} = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \frac{27}{5} FE$$

Wendepunkt ist $W_1(2; 2)$;

Ursprungsgerade durch W_1 ist also $g(x) = x$, wegen $m = \frac{2}{2} = 1$;

Schnittstellen: $f_1(x) = g(x) \iff x^3 - 6x^2 + 9x = x$

$$\iff x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\iff x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4 \notin \text{des betroffenen Intervalls.}$$

Fläche zwischen G_1 und Graph der Geraden:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 4 FE \implies$$

Teilungsverhältnis: $\frac{4}{\frac{27}{4} - 4} = \frac{16}{11}$, da der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Geraden, G_1 und der x -Achse $(\frac{27}{4} - 4)$ beträgt.

d) $f_t(x) = t^2x^3 - 6tx^2 + 9x$ und $f(x) = 0, 25x^3 - 3x^2 + 9x$.

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

aus $-6t = -3$ ist $t = \frac{1}{2}$, damit ist $t^2 = \frac{1}{4} = 0,25$ erfüllt.

□

1.4.3 Aufgabe

Lösung.

- $f(x) = x^3 - x$

a) Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$

Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung, da der Funktionsterm nur gerade Exponenten enthält;

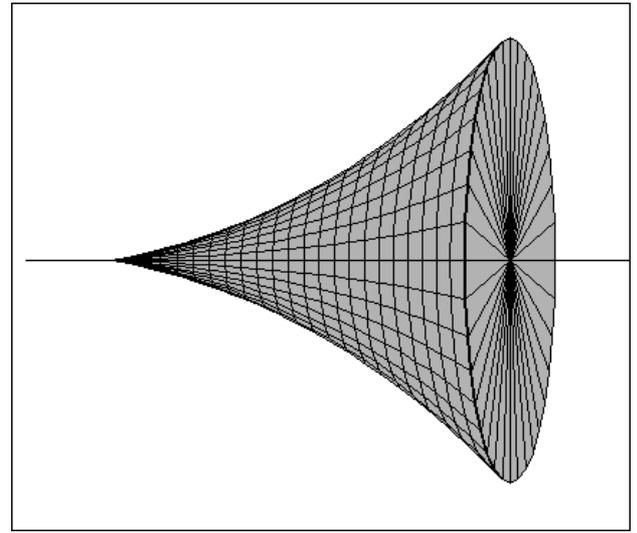
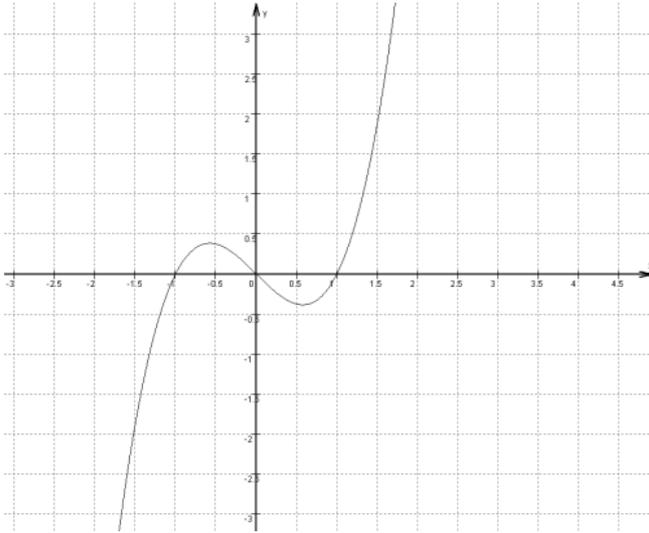
Achsen Schnittpunkte: y -Achsenabschnitt: $S_y(0; 0)$; Nullstellen: $N_1(0; 0), N_2(1; 0), N_3(-1; 0)$

Extrempunkte: $TP(0,577; -0,385), HP(-0,577; 0,385)$

Wendepunkte: $WP(0; 0)$

Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

c) Rotationsvolumen: $V_{rot} = 25,37 VE$



• $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

a) *Definitionsbereich:* $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Verhalten im Unendlichen: $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow \infty; \quad x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$

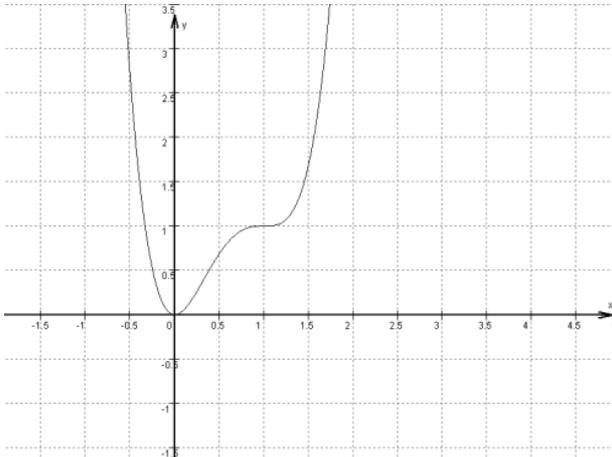
Symmetrie: Weder Punktsymmetrie zum Ursprung noch Achsensymmetrie zur y -Achse, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten enthält;

Achsen Schnittpunkte: y -Achsenabschnitt: $S_y(0; 0)$; Nullstellen: $N(0; 0)$ (doppelt)

Extrempunkte: $TP(0; 0), \quad HP(-0,577; 0,385)$

Wendepunkte: $WP_1(1; 1) = \text{Sattelpunkt}; \quad WP_2\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{27}\right)$

Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$



□

1.4.4 Aufgabe

Lösung.

a) *Achsen Schnittpunkte:* $S_y(0; 0) = N_1(0; 0)$;

falls $49b^2 - 22b \geq 0$, gibt es die zusätzlichen Schnittpunkte mit der x -Achse:

$$N_2\left(7b + \sqrt{49b^2 - 22b}; 0\right); \quad N_3\left(7b - \sqrt{49b^2 - 22b}; 0\right);$$

b) $f_{0,5}(x) = 1,5x^3 - 10,5x^2 + 16,5x$

Achsen Schnittpunkte: y -Achsenabschnitt: $S_y(0; 0)$

Nullstellen: $N_1(0; 0)$; $N_2(2,38; 0)$; $N_3(4,62; 0)$;

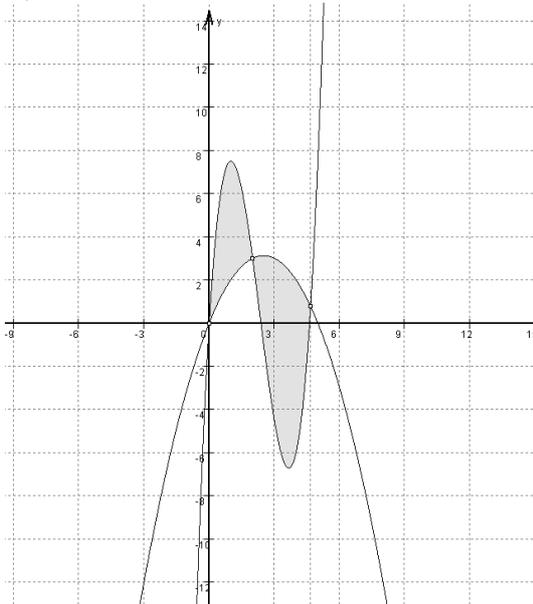
c) Extrempunkte: $HP(1; 7,5)$; $TP(3,67; -6,72)$

Wendepunkte: $WP(\frac{6}{3}; \frac{7}{18}) = WP(2,33; 0,39)$

e) Wendetangente: $y = -8x + 19\frac{1}{18}$

f)

f₁)



f₂)

$$\Delta(x) = 1,5x^3 - 10x^2 + 14x$$

Nullstellen von $\Delta(x)$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{14}{3}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 7,33 FE + 15,8 FE = 23,13 FE$$

□

2 e-Funktionen

2.1 Funktionsuntersuchung

2.1.1 Aufgabe

Lösung.

1) a) k b) $\frac{1}{k}$ c) $\frac{1}{k^3}$ d) k ;

2) a) $x = \frac{\ln 7 - 2}{3}$ b) $x = \ln 6$ c) $x_{1,2} = \pm \sqrt{\ln 4}$. □

2.1.2 Aufgabe

Lösung.

a) $f'(x) = -10e^x + 2e^{2x}$; $F(x) = 25x - 10e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$; $x_1 = \ln 5$

b) $f'(x) = 2x + 2e^{-x}(x - 1 - e^{-x})$

c) $f'(x) = 2xe^{x^2}$; $x_1 = 0$

d) $f'(x) = e^x(2x - 4 + x^2)$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$

e) $f'(x) = e^{-kx}(2x - kx^2 - kc)$

f) $f'(x) = -3e^{-x}(t^2 + e^{-x})^2$

g) $f'(x) = 2txe^{tx^2-4}$

h) $f'(x) = 3e^{-x}(1 + e^{-2x+2})$; keine Nullstellen für die 1. Ableitung

i) $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{5x^3}$ □

2.1.3 Aufgabe

Lösung.

a) $S_y(0; -27)$; $N(-\ln 4; 0) = W_1$; $W_2(-\ln \frac{4}{3}; -19)$; $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -64$; $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty$.

b) $N(0; 0) = S_y$; $T(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}e^3)$; $W(1; -e^2)$; $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty$. □

2.2 Integralrechnung

2.2.1 Aufgabe

Lösung.

a) $-\frac{1}{e^2} + 1 \approx 0,9$; b) $\approx 1,5$; c) $\approx 3,8$; d) $\approx 12,9$ □

2.3 Funktionenschar

2.3.1 Aufgabe

Lösung.

a) $a \approx 97$; $k \approx 0,14$; $97^\circ C$; $195^\circ C$; $1,5^\circ C$; 0 ; Nein;

b) $a = 10^\circ C$. □

2.4 Vermischte Aufgaben

2.4.1 Aufgabe

Lösung.

a) $k = 2 \implies f_2(x) = 2x^2e^{-x+1,5}$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies S_y(0; 0)$

Schnittpunkte mit der x -Achse: $f(x) = 0 \implies 2x^2e^{-x+1,5} = 0 \quad / : 2e^{-x+1,5} \implies x^2 = 0 \implies$

$x_1 = x_2 = 0$ doppelte Nullstelle $\implies S_x(0; 0)$

Ableitungen (Produkt- und Kettenregel): $f'_2(x) = 4x \cdot e^{-x+1,5} + 2x^2 \cdot e^{-x+1,5} \cdot (-1) = 2e^{-x+1,5}(2x - x^2)$

$f''_2(x) = 2e^{-x+1,5} \cdot (-1) \cdot (2x - x^2) + 2e^{-x+1,5} \cdot (2 - 2x) = 2e^{-x+1,5}(-2x + x^2 + 2 - 2x) = 2e^{-x+1,5}(x^2 - 4x + 2)$

$f'''_2(x) = 2e^{-x+1,5} \cdot (-1) \cdot (x^2 - 4x + 2) + 2e^{-x+1,5} \cdot (2x - 4) = 2e^{-x+1,5}(-x^2 + 6x - 6)$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung $f'_2(x) = 0 \iff 2e^{-x+1,5}(2x - x^2) = 0 \iff 2x - x^2 = 0$

$\iff x_1 = 0, x_2 = 2$ mögliche Extremstellen;

Hinreichende Bedingung $f''_2(x) \lessgtr 0$

$f''_2(0) = 2e^{1,5} \cdot 2 = 4e^{1,5} > 0 \implies x = 0$ Tiefpunktstelle

$f''_2(2) = 2e^{-0,5} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = -4e^{-0,5} < 0 \implies x = 2$ Hochpunktstelle

$f_2(0) = 0 \implies TP(0; 0)$ Tiefpunkt

$f_2(2) = 2 \cdot 2^2 \cdot e^{-0,5} = 8e^{-0,5} \approx 4,85 \implies HP(2; 4,85)$ Hochpunkt

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''_2(x) = 0 \iff 2e^{-x+1,5}(x^2 - 4x + 2) = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0$

$\iff x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586, x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414$ mögliche Wendestellen

Hinreichende Bedingung: $f'''_2(x) \neq 0$

$f'''_2(0,586) = -14,10 \neq 0 \implies x_1 = 0,586$ Wendestelle;

$f'''_2(3,414) = 0,83 \neq 0 \implies x_2 = 3,414$ Wendestelle;

$f_2(0,586) \approx 1,713 \implies WP_1(0,586; 1,713); f_2(3,414) \approx 3,438 \implies WP_2(3,414; 3,438)$

Verhalten im Unendlichen:

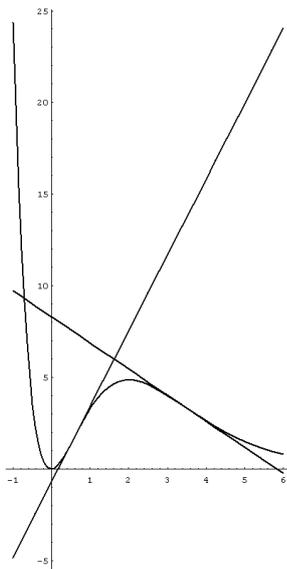
$x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0 \implies y = 0$ waagerechte Asymptote bei $+\infty$

Symmetrieverhalten:

$f(-x) = 2x^2e^{x+1,5} \neq f(x) \implies$ keine Achsensymmetrie zur y -Achse;

$f(-x) = 2x^2e^{x+1,5} \neq -f(x) \implies$ keine Punktsymmetrie zum Ursprung;

Graph von f_2 im Bereich $-1 \leq x \leq 6: f_2(-1) \approx 24,36; f_2(6) \approx 0,79$



b) Tiefpunkt $TP(0; 0); m = f'_2(0) = 0 \implies t(x) = 0$

Wendepunkt $WP_1(0,586; 1,713):$

Punkt-Steigungsform $y - y_1 = m(x - x_1);$

$m = f'_2(0,586) = 4,13$

$\implies t(x) = 4,13x - 0,71$

Wendepunkt $WP_2(3,414; 3,438):$

Punkt-Steigungsform $y - y_1 = m(x - x_1);$

$m = f'_2(3,414) = -1,424$

$\implies t(x) = -1,424x + 8,3$

c) $f'_k(x) = ke^{-x+1,5}(2x - x^2)$ $f''_k(x) = ke^{-x+1,5}(x^2 - 4x + 2)$.
 $f'_k(x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0 \iff x_1 = 0; x_2 = 2$ mögliche Extremstellen (unabhängig von k).
 $f''_k(0) = 4ke^{1,5} > 0$, da $k > 0 \implies T(0; 0)$ lokaler Tiefpunkt.
 $f''_k(2) = -4ke^{-0,5} < 0$, da $k > 0 \implies H(2; 4ke^{-0,5})$ lokaler Hochpunkt ($f_k(2) = 4ke^{-0,5}$).

Alle Hochpunkte liegen auf der Geraden $x = 2$ (Ortslinie).

d) **Erste Lösung:**

$$F'_1(x) = -ke^{-x+1,5} \cdot (-1) \cdot (+2x + 2) + (-ke^{-x+1,5}) \cdot (2x + 2) = kx^2e^{-x+1,5} = f_k(x)$$

$\implies F_1$ Stammfunktion zu f_k

$$F'_2(x) = \cdot e^{-x+1,5} + (-2xk)e^{-x+1,5} \cdot (-1) + 0 = 2kxe^{-x+1,5}(x - 1) \neq f_k(x)$$

$\implies F_2$ keine Stammfunktion zu f_k

Zweite Lösung (Partielle Integration): $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \int kx^2e^{-x+1,5} dx \\ &= \int \underbrace{(-e^{-x+1,5})'}_{u'} \cdot \underbrace{kx^2}_v dx = \underbrace{-e^{-x+1,5}}_u \cdot \underbrace{kx^2}_v - \int \underbrace{-e^{-x+1,5}}_u \cdot \underbrace{2kx}_{v'} dx \\ &= -kx^2e^{-x+1,5} + \int e^{-x+1,5} \cdot 2kx dx = -kx^2e^{-x+1,5} + \int \underbrace{(-e^{-x+1,5})'}_{u'} \cdot \underbrace{2kx}_v dx \\ &= -kx^2e^{-x+1,5} + \underbrace{(-e^{-x+1,5})}_u \cdot \underbrace{2kx}_v - \int \underbrace{-e^{-x+1,5}}_u \cdot \underbrace{2k}_{v'} dx \\ &= -kx^2e^{-x+1,5} - 2kxe^{-x+1,5} + 2k \int e^{-x+1,5} dx \\ &= -kx^2e^{-x+1,5} - 2kxe^{-x+1,5} - 2ke^{-x+1,5} = -ke^{-x+1,5}(x^2 + 2x + 2) = F_1(x) \end{aligned}$$

$\implies F_1$ Stammfunktion zu f_k ; F_2 keine Stammfunktion zu f_k

e) $\int_0^2 f_k(x) dx = 5$, weil f_k eine positive Funktion ist.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f_k(x) dx &= \left[-ke^{-x+1,5}(x^2 + 2x + 2) \right]_0^2 = \left(-ke^{-0,5}(4 + 4 + 2) \right) - \left(-ke^{1,5} \cdot 2 \right) = -10ke^{-0,5} + 2ke^{1,5} \\ \implies -10ke^{-0,5} + 2ke^{1,5} &= 5 \implies k(-10e^{-0,5} + 2e^{1,5}) = 5 \iff k = 5 : (-10e^{-0,5} + 2e^{1,5}) \approx 1,72 \end{aligned}$$

f) $\mathcal{A} = \int_0^\infty f_2(x) dx = \left[-2e^{-x+1,5}(x^2 + 2x + 2) \right]_0^\infty = 0 - (-2e^{1,5} \cdot 2) = 4e^{1,5} \approx 17,9 FE.$ □

2.4.2 Aufgabe

Lösung. a) $f_3(x) = (x + 3)e^{-\frac{1}{2}x}$

a₁) $x \rightarrow -\infty, f_3(x) \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty, f_3(x) \rightarrow 0 \implies y = 0$ waagerechte Asymptote bei $+\infty$.

a₂) $S_y: x = 0 \implies f_3(0) = 3e^0 = 3 \quad S_y(0; 3)$

$S_x: f_3(x) = 0 \implies (x + 3)e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \implies x + 3 = 0 \implies x = -3 \implies S_x(-3; 0)$

a₃) $f'_3(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x + 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1)$

$f''_3(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x - 1)$

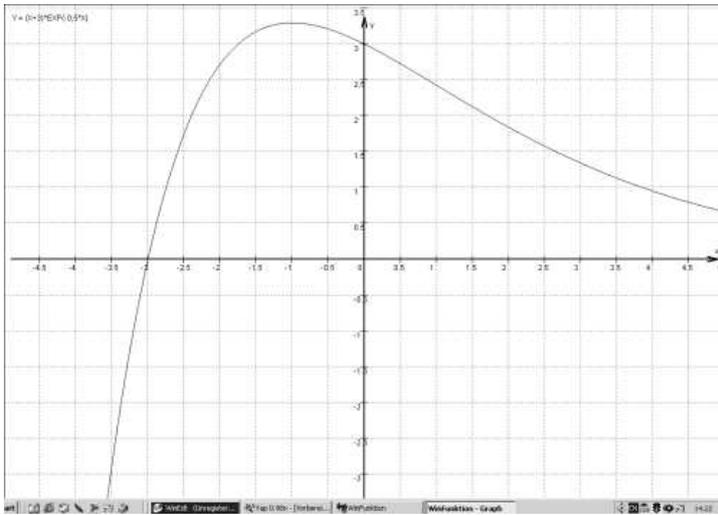
Extrema: $f'_3(x) = 0 \implies x + 1 = 0 \implies x = -1$ mögliche Extremstelle; $f_3(-1) = 2e^{\frac{1}{2}} \approx 3,297$

$$f_3''(-1) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}(-2) < 0 \implies H(-1; 2, 297) \text{ lokaler Hochpunkt.}$$

$$a_4) f_3''(x) = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1 \text{ Wendestelle (auf den Nachweis mit } f_3''' \text{ wird verzichtet);}$$

$$f_3(1) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2,426 \quad W(1; 2, 426) \text{ Wendepunkt.}$$

a₅)



a₆) **Erste Lösung:**

$$F_3'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (x+5)\right) + (-2e^{-\frac{1}{2}x}) \cdot 1 = 2e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 1\right) = 2e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}(x+3) = f(x)$$

$$\implies F_3 \text{ Stammfunktion von } f_3.$$

Zweite Lösung (Partielle Integration): $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (x+3)e^{-\frac{1}{2}x} dx = \\ &= \int \underbrace{(-2e^{-\frac{1}{2}x})'}_{u'} \cdot \underbrace{(x+3)}_v dx = \underbrace{-2e^{-\frac{1}{2}x}}_u \cdot \underbrace{(x+3)}_v - \int \underbrace{(-2e^{-\frac{1}{2}x})}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx = \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}x}(x+3) + 2 \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x}(x+3) + 2(-2e^{-\frac{1}{2}x}) = -2e^{-\frac{1}{2}x}(x+5) = \\ &= F_3(x) \end{aligned}$$

$$a_7) \mathcal{A} = \int_{-3}^0 f_3(x) dx = [-2e^{-\frac{1}{2}x}(x+5)]_{-3}^0 = (-2e^0 \cdot 5) - (-2e^{\frac{3}{2}} \cdot 2) = -10 + 4e^{\frac{3}{2}} \approx 7,927$$

$$a_8) \mathcal{A}(z) = \int_0^z f_3(x) dx = [-2e^{-\frac{1}{2}x}(x+5)]_0^z = (-2e^{-\frac{1}{2}z}(z+5)) - (-2e^0 \cdot 5) = -2e^{-\frac{1}{2}z}(z+5) + 10$$

$$z \rightarrow \infty, \quad \mathcal{A}(z) \rightarrow 10.$$

b)

$$b_1) f_a'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x+a) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}\right)$$

$$f_3''(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{a}{4} - \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-1 + \frac{1}{4}x + \frac{a}{4}\right)$$

$$b_2) f_a'(x) = 0 \implies e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a\right) = 0 \implies 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a = 0 \implies x = 2 - a \text{ mögliche Extremstelle}$$

$$f_a''(2-a) = e^{-\frac{1}{2}(2-a)} \left(-1 + \frac{1}{4}(2-a) + \frac{1}{4}a\right) = e^{-1+\frac{1}{2}a} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a\right) = -\frac{1}{2}e^{-1+\frac{1}{2}a} < 0$$

$$\implies x = 2 - a \text{ Hochpunktstelle}$$

$$f_a(2-a) = (2-a+a)e^{-\frac{1}{2}a} = 2e^{-1}e^{\frac{1}{2}a} = \frac{2}{e}e^{\frac{1}{2}a} \implies H_a(2-a; \frac{2}{e}e^{\frac{1}{2}a})$$

$$H_a \text{ liegt auf der } y\text{-Achse} \iff 2-a=0 \iff a=2;$$

$$\text{Für } a=2 \implies H_2(0; 2) \in y\text{-Achse.}$$

□

2.4.3 Aufgabe

Lösung.

a) Verhalten im Unendlichen:

$$x \rightarrow -\infty, \quad f(x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad f(x) \rightarrow 0$$

$\implies y=0$ waagerechte Asymptote bei $\pm\infty$

Achsenschnittpunkte: $S_y(0; 0) = N(0; 0)$

Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung, da $f(-x) = -f(x)$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = (5 - 5x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad f''(x) = 5x(x^2 - 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad f'''(x) = -5(x^4 - 6x^2 + 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

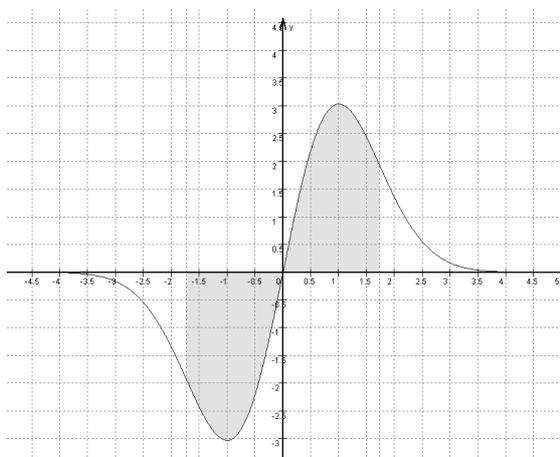
Extrempunkte: $TP(-1; -3,033)$, $HP(1; 3,033)$

Wendepunkte: $WP_1(-\sqrt{3}; -1,93)$, $WP_2(0; 0)$, $WP_3(\sqrt{3}; 1,93)$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{W} = [-3,033; 3,033]$

b)



c) Nr. (2) ist Stammfunktion zu f , da gilt: $F'(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = 5xe^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)$.

$$d) \quad \mathcal{A} = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \left[2 \cdot (-5e^{-\frac{1}{2}x^2}) \right]_0^{\sqrt{3}} \approx 7,769 FE, \quad \text{da } f \text{ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.}$$

e)

$$e_1) \quad \mathcal{A} = \int_0^{10} f(x) dx = \left[-5e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^{10} = (-9,64 \cdot 10^{-22}) - (-5) \approx 5 FE$$

$$e_2) \quad \mathcal{A}(k) = \int_0^k f(x) dx = \left[-5e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^k = (-5e^{-\frac{1}{2}k^2}) - (-5) = -5e^{-\frac{1}{2}k^2} + 5$$

für $k \rightarrow \infty$ gilt: $\mathcal{A}(k) \rightarrow 5$, da $-5e^{-\frac{1}{2}k^2} \rightarrow 0$

□

2.4.4 Aufgabe

Lösung.

a) $f_a(x) = (e^{-x} - a)^2 = e^{-2x} - 2ae^{-x} + a^2$

$F_a(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + 2ae^{-x} + a^2x$ eine Stammfunktion

$f'_a(x) = -2e^{-2x} + 2ae^{-x} = 2e^{-x}(-e^{-x} + a)$

$f''_a(x) = 4e^{-2x} - 2ae^{-x} = 2e^{-x}(2e^{-x} - a)$

$f'''_a(x) = -8e^{-2x} + 2ae^{-x} = 2e^{-x}(-4e^{-x} + a)$

b) $N(-\ln 2; 0); \quad S_y(0; 1); \quad TP(-\ln 2; 0); \quad WP(0; 1)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 4 \implies y = 4$ waagerechte Asymptote gegen $+\infty$.

c) —

d) $TP(-\ln a; 0)$ Die Verkaufszahl beträgt 0 Stück.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = a^2$

f) $\int_0^4 f_2(x) dx \approx 12,6$

Die Summe beträgt ca. 12,6 Tausend Stück.

g) $\int_0^k f_0(x) dx = -\frac{1}{2e^{10}} + 0,5$

$\int_0^k e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^{10}} + 0,5$

$k = 5 \implies$ Nach dem Monat Mai werden etwa 0,49998 Tausend Stück verkauft worden sein.

□

3 Stochastik

3.1 Vermischte Aufgaben

3.1.1 Aufgabe

Siehe Buch.

3.1.2 Aufgabe

Lösung.

a) $n = 60$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kein Laplace Versuch;

k	1	2	3	4	5
H(k)	11	8	14	16	11
h(k)	$\frac{11}{60}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{60}$

c) $\bar{x} = 3,13$, $\bar{s}^2 = 1,85$, $\bar{s} = \sqrt{1,85} = 1,36$

d) $P(X = 4) = 26,7\%$ e) $P(X \geq 2) = 81,7\%$

□

3.1.3 Aufgabe

Lösung.

$P(\text{Treffer Jäger 1}) = 0,3$ $P(\text{Treffer Jäger 2}) = 0,5$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$.

Andere Lösung: Baumdiagramm

□

3.1.4 Aufgabe

Lösung.

a) \bar{X} : Ausgabe für die Lose (3, 6, 9); $E(X) = 8,13$

b) a der Lospreis; $a > 12,91 \text{ €}$

□

3.1.5 Aufgabe

Lösung.

a) $P(\text{Huskies}) = 0,3$ $P(\text{Lions}) = 0,7$ maximal $n = 5$; Bernoulli-Versuch; kein Laplace-Versuch;

qualitatives Merkmal: *Spielausgang*; Ausprägungen: *Huskies-Sieg* bzw. *Lions-Sieg*; Spielstand: *Huskies : Lions*

c) $P(\text{Sieg/Niederlage in vier Spielen}) = 3 \cdot P(1 : 3) + 3 \cdot P(3 : 1) = 36,54\%$

□

3.1.6 Aufgabe

Lösung.

a) $P(T) = 0,4$; $P(N) = 0,6$; kein Laplace Versuch; Bernoulli Versuch

$S = \{(N, N, N, N); (N, N, N, T); \dots (T, T, T, T)\}$ $2^4 = 16$ Elemente; $E_1 = S \setminus \{(N, N, N, N)\}$

b) $P(E_1) = B(4; 0,4; 4) = 2,56\%$ $P(E_2) = B(4; 0,4; 1) = 34,56\%$

□

3.1.7 Aufgabe

Lösung.

Bernoulli Versuch; Erfolg = "durchkommen"; $p = 0,7$; $q = 0,3$

$$P(E_1) = B(8; 0,7; 8) = \binom{8}{8} \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^0 = 5,8\%$$

$$P(E_2) = P(\text{"6mal durchkommen"}) = B(8; 0,7; 6) = 0,2965$$

$$P(E_3) = 1 - (P(X = 8) + P(X = 7) + P(X = 6)) \approx 0,448 \quad \square$$

3.1.8 Aufgabe

Lösung.

a) 4-stufiger Versuch; $P(2; 2; 2; 1) = 40,9\%$; $P(2) = \frac{3}{11}$; $P(1) = \frac{1}{6}$; kein Laplace Versuch

b) Bernoulli-Versuch mit 18 Wiederholungen; $p = 0,01$; $q = 0,99$; $P(X = 12) = P(12 \text{ Erfolge})$; $? = \binom{18}{12}$

c) $P(\text{rot}) = \frac{3}{4}$; $P(\text{blau}) = \frac{1}{4}$;

Zufallsversuch mit 3 roten und einer blauen Kugel; Ziehen mit Zurücklegen (auch Bernoulli Versuch möglich) \square

3.1.9 Aufgabe

Lösung.

Bernoulli-Versuch; $n = 9$; $p = 0,7$; $P(X = k) = B(n, p, k)$, $k = 0, 1, \dots, 9$

$$\implies P(X = 0) = 1,968 \cdot 10^{-5}; \dots; P(X = 9) = 0,0404 \quad \square$$

3.1.10 Aufgabe

Lösung.

$$\text{a) } P(\{1\}) = \frac{3}{8} \quad P(\{2\}) = \frac{4}{8} \quad P(\{3\}) = \frac{1}{8}$$

aa) X : Anzahl der Würfe mit der Zahl 1; 6-stufiger Bernoulli Versuch: $p = \frac{3}{8}$, $q = \frac{5}{8}$

$$P(X = 5) = B(6, \frac{3}{8}, 5) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^1 \approx 0,0278 = 2,78\%$$

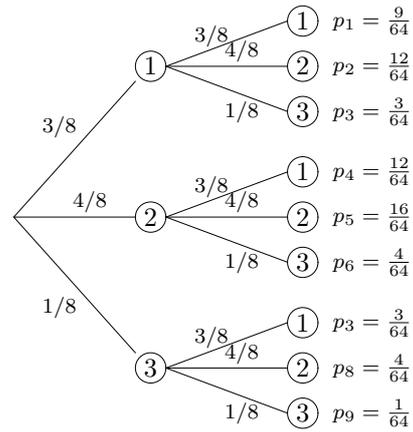
ab) X : Anzahl der Würfe mit der Zahl 2; 6-stufiger Bernoulli Versuch: $p = \frac{4}{8}$, $q = \frac{4}{8}$

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$= 1 - \left(\binom{6}{0} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^5 \right) = 0,8906 = 89,06\%$$

b) $P(E_1) = p_2 + p_4 =$
 $= \frac{12}{64} + \frac{12}{64} = \frac{24}{64} = 0,375 = 37,5\%$

$P(E_2) = p_2 + p_3 + p_6 =$
 $= \frac{12}{64} + \frac{3}{64} + \frac{4}{64} = \frac{19}{64} = 0,297 = 29,7\%$



c) $P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{512} \approx 0,0234 = 2,34\%$

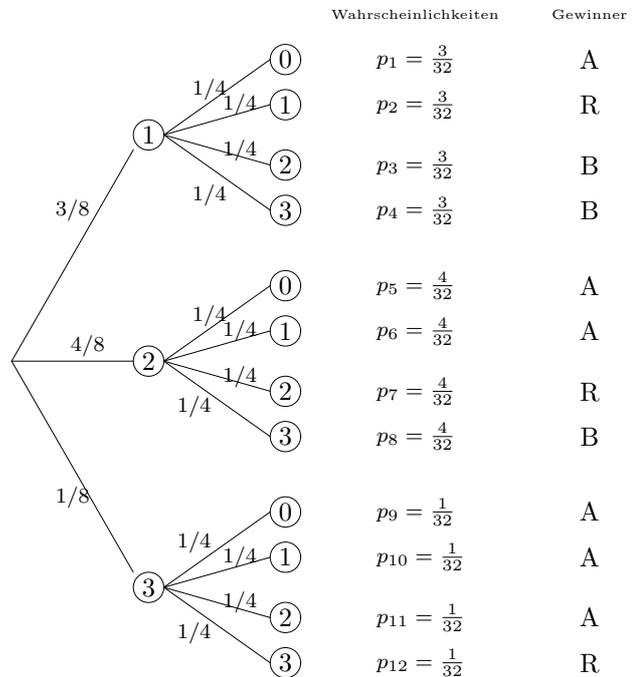
d)

da) $P(A) = p_1 + p_5 + p_6 + p_9 + p_{10} + p_{11} = \frac{14}{32}$

$P(B) = p_3 + p_4 + p_{10} = \frac{10}{32}$

$P(R) = p_2 + p_7 + p_{12} = \frac{8}{32}$

A ist im Vorteil.



db)

X: Gewinn von A

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
8	$\frac{14}{32}$	$\frac{112}{32}$
0	$\frac{18}{32}$	0
		$E(X) = \frac{112}{32} = 3,5 \text{ €}$

Y: Gewinn von B

y_i	$P(Y = y_i)$	$y_i \cdot P(Y = y_i)$
a	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}a$
0	$\frac{22}{32}$	0
		$E(Y) = \frac{10}{32}a \text{ €}$

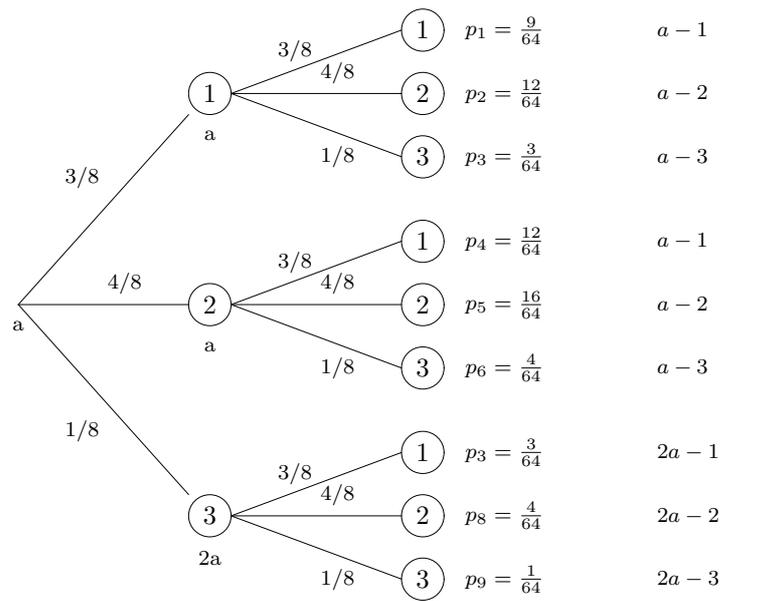
$\Rightarrow E(Y) = E(X) \Rightarrow \frac{10}{32}a = 3,5 \Rightarrow a = 11,2$

Wenn B gewinnt, muss A an B 11,20 € zahlen.

e)

X : Gewinn

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
$a - 1$	$p_1 + p_4 = \frac{21}{64}$	$\frac{21}{64}(a - 1)$
$a - 2$	$p_2 + p_5 = \frac{28}{64}$	$\frac{28}{64}(a - 2)$
$a - 3$	$p_3 + p_6 = \frac{7}{64}$	$\frac{7}{64}(a - 3)$
$2a - 1$	$p_7 = \frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}(2a - 1)$
$2a - 2$	$p_8 = \frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}(2a - 2)$
$2a - 3$	$p_9 = \frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}(2a - 3)$
		$E(X) = \frac{72a - 112}{64} \in$



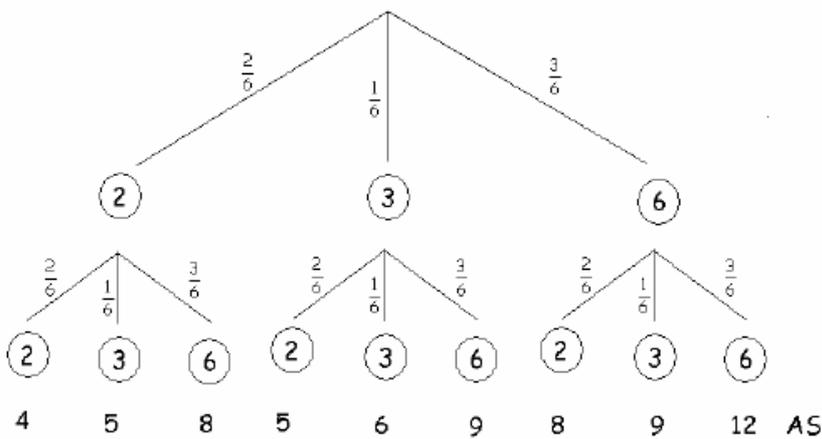
$$\implies E(X) = a \implies \frac{72a - 112}{64} = a \implies a = 14$$

Bei einem Einsatz von 14€ ist das Spiel auf lange Sicht fair. □

3.1.11 Aufgabe

Lösung.

a) X : Augensumme AS



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	$P(X = k)$
4	$\frac{1}{9}$
5	$\frac{1}{9}$
6	$\frac{1}{36}$
8	$\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{6}$
12	$\frac{1}{4}$

b) $A = \{AS4; AS6; AS12\}$

$$P(A) = P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 12) = \frac{7}{18} \approx 38,9\%$$

$$B = \{AS4; AS5; AS6\}$$

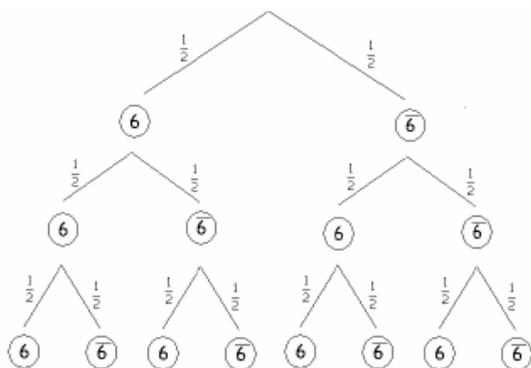
$$P(B) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$C = A \cap B = \{AS4; AS6\}$$

$$P(C) = P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{5}{36} \approx 13,9\%$$

$$\bar{C} = \{AS5; AS8; AS9; AS12\}.$$

- c) Ereignis D : Bei drei Ziehungen tritt mindestens einmal die Zahl 6 auf.
Gegenereignis \bar{D} : Bei drei Ziehungen tritt keine 6 auf.



$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0,5^3 = 0,875 = 87,5\%$$

- d) Es muss mindestens 5mal gezogen werden.

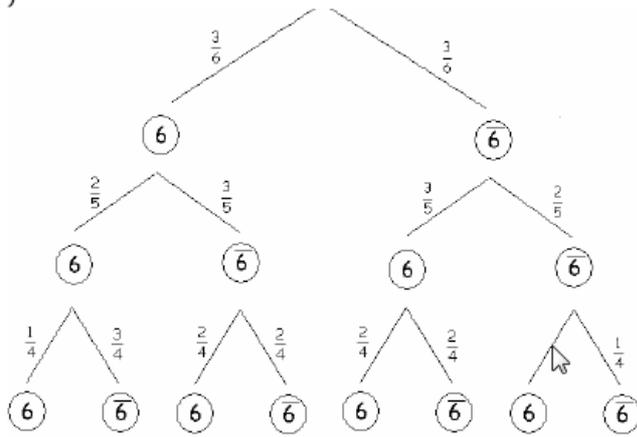
e) $P(D) = 87,5\%$ (siehe d)).

Y : Anzahl der "Zahl 6" bei sechs Ziehungen.
 Y ist binomialverteilt mit $n = 6$ und $p = 0,5$.

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 89,06\%.$$

Es ist also wahrscheinlicher bei 6 Ziehungen mindestens zweimal eine 6 als bei drei Ziehungen mindestens einmal eine 6 zu ziehen.

f) ,



Ereignis G : Es sind genau zwei Kugeln mit der Zahl 6 dabei; $G = \{6\bar{6}\bar{6}; \bar{6}6\bar{6}; \bar{6}\bar{6}6\}$

$P(G) = 45\%$

g) X : Gewinn des Glücksspielers in €.

k	$P(X = k)$	$k(X = k)$
0	$\frac{1}{3}$	0
6	$\frac{1}{6}$	1
-5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
	1	$E(X) = -\frac{3}{2} = -1,5$

Der Glücksspieler muss also langfristig mit einem Verlust von $1,5\text{€}$ rechnen.

h) e Einsatz in €.

k	$P(X = k)$	$k(X = k)$
$5 - e$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-e}{3}$
$11 - e$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11-e}{6}$
$-e$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{e}{2}$
	1	$E(X) = \frac{21-6e}{6}$

$E(X) = \frac{21-6e}{6} = 0 \implies e = \frac{21}{6} = 3,5$ Bei einem Einsatz von etwa $3,5\text{€}$ erwartet der Glücksspieler keinen Gewinn/Verlust, der Spielleiter also auch keinen Gewinn/Verlust.

i) Anzahl Möglichkeiten = $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 1 = 60$.

Begründung: es gibt 6 mögliche Positionen für die 3 und $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten für die beiden Kugeln mit Augenzahl 2. Die drei Kugeln mit Augenzahl 3 kommen dann auf die übrigen Positionen, also eine Möglichkeit.

□

4 Analytische Geometrie und Lineare Algebra

4.1 Punkte und Geraden

4.1.1 Aufgabe

Lösung.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

□

4.1.2 Aufgabe

Lösung.

a) Parallelogramm-Bedingung: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \left(= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ erfüllt.

b) Da \overrightarrow{AB} nicht senkrecht zu \overrightarrow{AD} ist (Skalarprodukt $\neq 0$), bilden die angegebenen Punkte keine Eckpunkte für ein Rechteck!

c) $\mathcal{A} = 36,98 FE$.

□

4.1.3 Aufgabe

Lösung.

ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck, da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}|$, aber $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}|$

□

4.1.4 Aufgabe

Lösung.

a) g und h schneiden sich in $S(21; -1; 14)$; g und k sind windschief zueinander; h und k sind windschief zueinander.

b) g und h schneiden sich in $S(1; 2; 5)$; g und k sind windschief zueinander; h und k sind parallel zueinander, aber nicht identisch.

□

4.2 Ebenen

4.2.1 Aufgabe

Lösung.

a) \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} und \overrightarrow{QP} sind nicht kollinear zueinander (jeweils).

b) \mathbb{E}_A : $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Parameterform

$-2x + 2y + 3z - 8 = 0$ Koordinatenform

$\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$ Hesse-Form

\mathbb{E}_B : $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Parameterform

$x - 13y + 6z + 6 = 0$ Koordinatenform

$$\frac{1}{\sqrt{206}} \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{Hesse-Form}$$

c) \mathbb{E}_A und \mathbb{E}_B schneiden sich in der Schnittgeraden $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 23/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 17/8 \\ 5/8 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

4.2.2 Aufgabe

Lösung.

a) Schnittpunkt $S(6; \frac{9}{2}; -\frac{9}{2})$ b) Schnittpunkt $S(5; -10; -2)$ □

4.2.3 Aufgabe

Lösung.

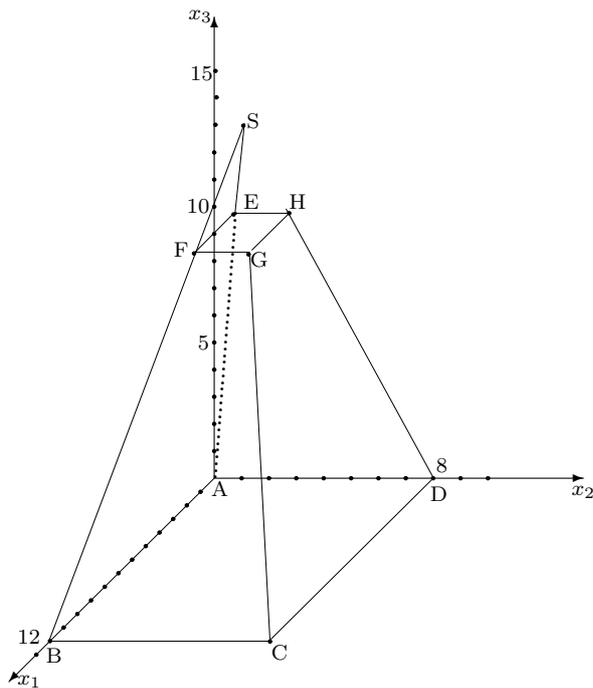
a) $Abst(P; \mathbb{E}) = \frac{1}{3}$ $Abst(R; \mathbb{E}) = 2$ b) $Abst(P; \mathbb{E}) = \frac{7}{\sqrt{3}}$ $Abst(R; \mathbb{E}) = 3\sqrt{3}$ □

4.3 Vermischte Aufgaben

4.3.1 Aufgabe

Lösung.

a) b)



$$AE: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$BF: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$AE \cap BF: r \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1,5r + 1,5s = 12 \\ r - s = 0 \\ 4r - 4s = 0 \end{vmatrix} \implies r = s = 4$$

$$\implies \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \implies S(6; 4; 16)$$

c) $M_1(\frac{12+12}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+0}{2}) = M_1(12; 4; 0);$ $M_2(\frac{15}{2}; 4; 12)$

Richtungsvektoren: $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix};$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$

Orthogonalität zweier Vektoren, wenn das Skalarprodukt 0 ist:

$$\overrightarrow{M_1M_2} * \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies \overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} * \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{FG}$$

$$Abst(M_1; M_2) = \sqrt{(-4,5)^2 + 0^2 + 12^2} = 12,816 LE = 128,16 m$$

d) Die Fläche $BCGF$ ist ein Trapez, da $BC \parallel GF$ und $BF \parallel CG$;

$$\mathcal{A}_{BCGF} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{GF}|}{2} \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{8+2}{2} \cdot 12,816 = 64,08 FE = 6408 m^2$$

$$\text{Kosten} = 6408 m^2 \cdot 35 \frac{\text{€}}{m^2} = 224280 \text{€}.$$

$$\text{e) } K: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für die Normale der Ebene gilt: } \vec{n} * \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} * \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 \cdot n_1 + 8 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0 \\ -4,5 \cdot n_1 + 3 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow n_2 = 0; \quad n_3 = k, \quad n_1 = \frac{8}{3}n_3 = \frac{8}{3}k;$$

$$\text{Wählen z.B. } k = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenform: } \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{f) Richtungsvektor: } \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{24}{4,3875 \cdot 8} = 0,6402 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 39,809^\circ.$$

$$\text{g) } LM_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad LM_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -16 \in [-18; 3]$$

$$LM_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6,5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad LM_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{32}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{32}{13} \in [-18; 3]$$

Weiterer Lösungsweg: M_1 muss auf der Schargerade liegen:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 0 = 8 + \frac{1}{2}a \Rightarrow a = -16 \in [-18; 3].$$

Sinngemäß mit M_2 . □

4.3.2 Aufgabe

Lösung.

a) $A(32; 12; 8)$, $B(12; 12; 8)$, $C(12; 20; 8)$, $D(32; 6; 12)$, $E(6; 6; 12)$, $F(6; 20; 12)$.

b) —

$$\text{c) } \mathbb{E}_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 32 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{E}_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbb{E}_1: 2x_2 + 3x_3 = 48, \quad \mathbb{E}_2: 2x_1 + 3x_3 = 48$$

$$\text{e) } 46, 19^\circ$$

$$\text{f) } 9, 4m$$

$$\text{g) } 25, 24^\circ$$

$$\text{h) } G(8; 14; 10\frac{2}{3})$$

$$\text{i) } \text{Nein}$$

$$\text{j) } H'(16; 9; 10)$$

□

4.3.3 Aufgabe

Lösung.

1.

$$\begin{aligned} \text{a) } & A(6; 2; -3), \quad B(6; 18; -3), \quad C(-4; 18; -3), \quad D(-4; 2; -3), \\ & K(-2; 6; 8), \quad L(-2; 16; 8), \\ & E(6; 2; 6), \quad F(6; 18; 6), \quad G(-4; 18; 6), \quad H(-4; 2; 6). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{—}$$

2.

$$\text{a) } 9, 16m$$

$$\text{b) } 4, 47m$$

$$\text{c) } 59, 03^\circ$$

$$\text{d) } 22, 36m^2$$

$$3. \quad AE \cap \mathbb{W} = \left\{ M\left(6; 2; \frac{19}{54}\right) \right\};$$

$$BF \cap \mathbb{W} = \left\{ N\left(6; 18; -1\frac{13}{18}\right) \right\}$$

$$CG \cap \mathbb{W} = \left\{ P\left(-4; 18; -\frac{53}{54}\right) \right\}$$

$$DH \cap \mathbb{W} = \left\{ Q\left(-4; 2; 1\frac{5}{54}\right) \right\}$$

4.

$$\text{a) } t = \mathbb{U} \cap \mathbb{W} \implies t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -101/30 \\ 151/15 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -23/10 \\ -32/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } S_1(2; 25; -\frac{7}{3})$$

$$\text{c) } 79, 26^\circ$$

$$\text{d) } S_1(2; 25; a) \quad \text{und gesucht ist } a \in \mathbb{R}, \text{ sodass } (S_1S_2S_3) \perp (BCGF)$$

$$\implies a = -1 \quad \text{und } \mathbb{N}: 2x_1 - 21x_3 = 25$$

□