Vorbereitung für die Abiturprüfung (GK)

Inhaltsverzeichnis

1 Ganzrationale Funktionen

1.1 Funktionsuntersuchung

1.1.1 Aufgabe

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Nullstellen sowie die Schnittpunkte mit der y-Achse.

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12\frac{1}{2}x + 6$ b) $f(x) = x^5 - 22,25x^3 + 100x$

c) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{10}x$ d) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2$

1.1.2 Aufgabe

Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte! Treffen Sie entsprechende Aussagen über das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen!

a) $f(x) = \frac{1}{5}(x+1)(x-2)(x+6)$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

1.1.3 Aufgabe

Führen Sie eine Funktionsuntersuchung (Symmetrie, NS, EP, WP, Randverhalten für $|x| \to \infty$) durch und zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem!

a) $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 9)$ b) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$

1.2 Integralrechnung

1.2.1 Aufgabe

Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion zur Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 0,5x - 7$?
Begründen Sie die Antwort!
$F_1(x) = x^2 - 8x + 0,5\,;$ $F_2(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{8}{6}x^3 + 0,25x^2 - 7x + 11\,;$ $F_3(x) = \frac{2}{24}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{14}{2}x - 113$

1.2.2 Aufgabe

Berechnen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

a) das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

b) die Fläche, die f mit der x-Achse einschließt;

c) die Fläche, die f mit der x-Achse über dem Intervall $[-1; 2]$ einschließt.

1.2.3 Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen f und g!

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,;$ $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x;$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4\,;$ $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4\,.$

1.3 Funktionenschar

1.3.1 Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = 4x^3 + 12ax^2 - 40ax$ für $a > 0$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_a! Geben Sie die Achsenschnittpunkte in Abhängigkeit von a an!

b) Bestimmen Sie für $a = 0,5$ die Extrem- und Wendepunkte!

c) Ermitteln Sie den Inhalt $A(a)$ der Flächen, die die Funktionen der Schar mit der x-Achse einschließen!

1.4 Vermischte Aufgaben

1.4.1 Aufgabe

Gegeben ist eine Funktionenschar durch $f_t(x) = -\frac{t}{2}x^3 + \frac{t^2}{2}x^2 + \frac{3t^3}{8}x\,; \quad t \in \mathbb{R}^+$.

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar auf Nullstellen.

b) Für diesen Aufgabenteil sei $t = 2$ angenommen. Geben Sie Lage und Art der Extrema und der Wendepunkte und die Gleichung der Wendetangente an. Zeichnen Sie den Graphen von f_2 und die Wendetangente.

c) Der Graph der Schar f_t schließt mit der x-Achse eine von t abhängige Fläche $A(t)$ ein, die zu berechnen ist. Welche Flächenmaßzahl ergibt sich für $t = 2$?

d) Die relative Hochpunktstelle einer ganzrationalen Funktion 2. Grades ist identisch mit der oben berechneten Wendestelle von f_2. Weiterhin verläuft ihr Graph durch den Ursprung und schließt im 1. Quadranten mit der 1. Achse eine Fläche von $\frac{128}{81}\,FE$ ein. Bestimmen Sie ihre Funktionsgleichung und zeichnen Sie ihren Graphen zum Graphen von f_2 .

1.4.2 Aufgabe

a) Der Graph G einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch den Ursprung und hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ zueinander parallele Tangenten. An der Stelle $x = 1$ verläuft die Tangente an den Graphen parallel zur 1. Achse. Die 1. Achse im Intervall $[0; 1]$, die Gerade $x = 1$ und der Graph G, der in diesem Intervall im 1. Quadranten verläuft, schließen eine Fläche von $\frac{11}{4}\,FE$ ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

b) Zu jedem $t > 0$ ist durch $f_t(x) = t^2x^3 - 6tx^2 + 9x$ eine Funktion f_t gegeben, deren Graph mit G_t bezeichnet sei. Untersuchen Sie G_t auf Schnittpunkte mit den Achsen, auf Extrempunkte und auf Wendepunkte. Zeichnen Sie G_1 im Intervall $[0\,;\,4]$.

c) Der Graph G_1 schließt mit der 1. Achse eine Fläche ein, die zu berechnen ist. Durch den Wendepunkt von G_1 verläuft eine Ursprungsgerade, welche die berechnete Fläche teilt. Welches Teilungsverhältnis bilden die beiden Teilflächen?

d) Zeigen Sie, dass die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 0,25x^3 - 3x^2 + 9x$ zur Funktionenschar f_t aus Teilaufgabe b) gehört.

1.4.3 Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktionen $\quad f(x) = x^3 - x \quad$ und $\quad g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.

a) Diskutieren Sie die Funktion unter Berücksichtigung der folgenden Aspekte: Definitionsbereich, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Wertebereich.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall; $[-2\,;\,2]$

c) Zeichnen Sie den Graphen von g im Intervall $[-1\,;\,2]$.

d) Der Graph von f rotiere im Intervall $[1\,;\,2]$ um die x-Achse. Zeichnen Sie den entstehenden Körper in das bereits vorhandene Koordinatensystem und berechnen Sie das entstehene Volumen!

1.4.4 Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar $\quad f_b(x) = 1,5x^3 - 21bx^2 + 33bx$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt von $f_b(x)$ und geben Sie sämtliche Achsenschnittpunkte in Abhängigkeit von b an!

   Betrachten Sie nun die spezielle Funktion $f_{0,5}(x)$ mit $\quad b = 0,5$.

b) Geben Sie die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt von $f_{0,5}(x)$ an!

c) Bestimmen Sie sämtliche Extrem- und Wendepunkte der Funktion $f_{0,5}(x)$ an!

d) Zeichnen Sie die Funktion $f_{0,5}$ im Intervall $[-1\,;\,5]$

e) Erstellen Sie die Gleichung der Wendetangente und deuten Sie deren Lage in dem unter d) gezeichneten Koordinatensystem an!

f) Der Graph von $f_{0,5}$ schließt mit dem Graphen der Funktion $h(x) = -0,5x^2 + 2,5x$ zwei verschieden große Flächenstücke ein.

   f_1) Zeichnen Sie den Graphen von h in das unter d) erstellte Koordinatensystem ein und schraffieren Sie die eingeschlossene Fläche!

   f_2) Berechnen sie die von $f_{0,5}$ und h eingeschlossene Fläche.

2 e-Funktionen

2.1 Funktionsuntersuchung

2.1.1 Aufgabe

1) Vereinfache: a) $e^{\ln k}$ b) $e^{-\ln k}$ c) $e^{-3\ln k}$ d) $\ln e^k$;

2) Berechne x: a) $e^{3x+2} = 7$ b) $e^{-x} - 6e^{-2x} = 0$ c) $-e^{x^2} + 2 = -2$.

2.1.2 Aufgabe

Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen. Bestimmen Sie die Nullstellen der 1. Ableitung bei a), c), d), h). Bilden Sie für a) und h) die Aufleitung der Funktionen.

a) $f(x) = (5 - e^x)^2$ d) $f(x) = (x^2 - 4)e^x$ g) $f(x) = e^{tx^2-4}$, $t \in \mathbb{N}$

b) $f(x) = (x - e^{-x})^2$ e) $f(x) = (x^2 + c)e^{-kx}$ h) $f(x) = -3e^{-x} - e^{-3x+2}$

c) $f(x) = e^{x^2}$ f) $f(x) = (t^2 + e^{-x})^3$ i) $f(x) = \frac{e^x}{5x^2}$

2.1.3 Aufgabe

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte und das Verhalten für $|x| \to \infty$.

a) $f(x) = (-4 + e^{-x})^3$ b) $f(x) = -xe^{-2x+4}$ $\mathbb{D} = (-\infty; 3]$

2.2 Integralrechnung

2.2.1 Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche unter den Graphen folgender Funktionen im Intervall $[0; 2]$ für a), b), d) und im Intervall $[1; 2]$ für c).

a) $f(x) = e^{-x}$ c) $f(x) = x^2 + x - e^{-3x}$ (Hinweis: keine Nullstellen in [1;2])

b) $f(x) = 3e^{-2x}$ d) $f(x) = (5 - e^x)^2$

2.3 Funktionenschar

2.3.1 Aufgabe

Die Funktionsschar $f_k(x) = ae^{-kx}$ beschreibt die Abkühlung von Getränken. Die Einheit für x sind Minuten, $x = 0$ ist der Beginn der Messung, hier: 12.00 Uhr Mittags. Die Temperatur zu Beginn der Messung ist a. $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine spezifische Flüssigkeitskonstante. $f(x)$ ist die Temperatur der Flüssigkeit mit der Konstante k zum Zeitpunkt x.

a) Jemand misst bei einer Tasse Kaffee um 12.03 Uhr Mittags eine Temperatur von $64° C$, um 12.05 eine Temperatur von $48,5° C$. Berechne k und a.
Welche Temperatur hatte der Kaffee zu Beginn der Messung, 5 Minuten vor der 1. Messung?
Welche Temperatur wird der Kaffee um 12.30 haben?
Wie wird sich die Temperatur des Kaffees entwickeln?
Kann der Kaffee auf unserem Planeten stehen?

b) Welche Anfangstemperatur hat ein Getränk mit $k = 10$ wenn gilt: $\int_0^1 f_{10}(x)\,dx = -\frac{1}{e^{10}} + 1$?

2.4 Vermischte Aufgaben

2.4.1 Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = kx^2e^{-x+1,5}$; $\quad k \in \mathbb{R}^+$; $\quad x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion $f_2 \quad (k = 2)$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte und Wendepunkte. Wie verhält sich der Graph der Funktionen im Unendlichen? Welche Aussagen können Sie über die Symmetrie des Graphen der Funktionenschar machen? Zeichnen Sie den Graphen von f_2 im Bereich $-1 \leq x \leq 6$.

b) Geben Sie je eine Gleichung der Tangente im Tiefpunkt und in den Wendepunkten an und zeichnen Sie diese mit in das Koordinatensystem ein.

Betrachten Sie in den folgenden Teilaufgaben $k > 0$ allgemein.

c) Zeigen Sie, dass die beiden Extremstellen von f_k $(k > 0)$ nicht von k abhängen (Tiefpunkt bei $x = 0$ und Hochpunkt bei $x = 2$). Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte an. Auf welcher Geraden liegen die Hochpunkte aller Graphen?

d) Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen eine Stammfunktion zu f_k ist:

$$F_1(x) = -ke^{-x+1,5}(x^2 + 2x + 2) \qquad F_2(x) = -2xke^{-x+1,5} + 1,5$$

e) Wie muss man k wählen damit die Funktion f_k über dem Intervall $[0; 2]$ den Inhalt $5\,FE$ einschließt?

f) Nun gilt wieder $k = 2$. Welche Fläche begrenzt die Funktion f_2 $(k = 2)$ im 1. Quadranten?

2.4.2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_a(x) = (x + a)e^{-\frac{1}{2}x}$; $\quad a \in \mathbb{R}^+$; $\quad x \in \mathbb{R}$.

a) Zunächst sei $a = 3$

a$_1$) Untersuchen Sie, wie sich f_3 für $|x| \to \infty$ verhält.

a$_2$) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen.

a$_3$) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema. $\Big($ *Zwischenlösung*: $f_3'(x) = -0,5e^{-0,5x}(x + 1)$ $\Big)$

a$_4$) Untersuchen Sie f_3 auf Wendepunkte.
$\Big($ Hinweis: Auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden. $\Big)$

a$_5$) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen unter der Berücksichtigung Ihrer bisher ermittelten Ergebnisse im Intervall $[-4\,; 7]$.

a$_6$) Zeigen Sie nun, dass die Funktion $F_3 = -2e^{-\frac{1}{2}x}(x + 5)$ eine Stammfunktion von f_3 ist.

a$_7$) Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f_3 mit der 1. Koordinatenachse im 2. Quadranten einschließt.

a$_8$) Die Gerade mit der Gleichung $x = z$ schließt mit dem Funktionsgraphen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl in Abhängigkeit von z. Welchen Wert nimmt diese Fläche für $z \to \infty$ an?

b) Im folgenden sei $a \in \mathbb{R}^+$.

b$_1$) Zeigen Sie, dass für die Terme der beiden ersten Ableitungen gilt:

$$f_a'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}\right); \qquad f_a''(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-1 + \frac{1}{4}x + \frac{a}{4}\right)$$

b$_2$) Wie ist a zu wählen, so dass der Hochpunkt auf der 2. Koordinatenachse liegt?

2.4.3 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $\quad f(x) = 5xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte und geben Sie den Definitions- und Wertebereich an.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f.

c) Beweisen Sie rechnerisch, welche der gegebenen Funktionen Stammfunktion von f ist:

$$(1) \quad F(x) = 5e^{-x} \qquad (2) \quad F(x) = -5e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (3) \quad F(x) = -\tfrac{5}{2}xe^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

d) Schraffieren und berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den Wendestellen von f

$\left(\text{Kontrollergebnis: Wendestellen bei } x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}\right)$

e)

e$_1$) Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen von f zwischen dem Nullpunkt $(0\,;\,0)$ und der senkrechten Gerade $x = 10$.

e$_2$) Berechnen Sie die Fläche für eine beliebige Senkrechte $x = k$, d.h. $\displaystyle\int_0^k f(x)\,dx$ für $k > 0$.

Was ergibt sich für $k \to \infty$?

2.4.4 Aufgabe

Ein Marketingmitarbeiter beobachtet bei der Produktpalette seines Unternehmens eine ungewöhnliche, aber immer ähnliche Entwicklung der Verkaufszahlen.
Er nummeriert die verschiedenen Produkte und definiert folgende Funktionsschar, welche die Entwicklung der Verkaufszahlen bis einschließlich Mai letzten Jahres beschreiben soll.

$$f_a(x) = \left(e^{-x} - a\right)^2 .$$

Die Einheit für x sind Monate;
$x = 0$ entspricht dem 1. Januar (letzten Jahres), 0 Uhr;
$x = 1$ entspricht dem 1. Februar (letzten Jahres), 0 Uhr, usw.
$a \in \mathbb{N}$ ist die Produktnummer;
$f_a(x)$ ist die Zahl der zum Zeitpunkt x verkauften Produkte der Nummer a in Tausend Stück.

a) Bestimme eine Stammfunktion F_a zu f_a sowie die ersten drei Ableitungen von f_a.

b) Untersuche die Funtion f_2 (d.h. $a = 2$) auf Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte und das Verhalten für $|x| \to \infty$.

c) Zeichne den Graphen der Funktion f_2 unter Verwendung der in b) ermittelten Daten für $x \in [-1\,;\,5]$.

d) Zeige, dass alle Produkte mit positiver Produktnummer zum Zeitpunkt $-\ln a$ die geringste Verkaufszahl vorweisen. Wie groß war diese Verkaufszahl?

e) Der Marketingleiter hat die Produktnummern entsprechend der künftig zu erwartenden Verkaufszahl geordnet. Zeige, dass das Unternehmen langfristig mit einer konstanten Verkaufszahl von a^2 Stück des jeweiligen Produktes der Nummer a rechnen kann.

f) Die Fläche unter dem Funktionsgraphen der Funktion f_2 im Intervall $[0\,;\,4]$ gibt die Summe aller verkauften Produkte der Nummer 2 von Januar bis einschließlich April (letzten Jahres) an. Berechne diese Summe.

g) Bis zum Ende welchen Monats wurde im letzten Jahr von dem Produkt Null $-\frac{1}{2e^{10}} + 0,5 \approx 0,49998$ Tausend Stück verkauft?

3 Stochastik

3.1 Vermischte Aufgaben

3.1.1 Aufgabe

Erläutern und interpretieren Sie folgende Begriffe der Stochastik anhand von "typischen" Beispielen: relative und absolute Häufigkeiten, Häufigkeitstabelle zur Beschreibung von ..., Histogramm zur graphischen Darstellung von ..., Merkmale, Ausprägungen der Merkmale, Merkmalswerte, quantitative Merkmale, qualitative Merkmale, empirische Verteilung, Mittelwert, Wahrscheinlichleitsverteilung, Erwartungswert, Bernoulli-Versuch, Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Varianz, Standardabweichung.

3.1.2 Aufgabe

(Gezinkter Würfel) Paul würfelt mit einem fünfseitigen Würfel zunächst 60 Mal hintereinander. Der Würfel bleibt 16 Mal auf der Seite "4", 14 Mal auf der Seite "3" und 8 Mal auf der Seite "2" liegen Die "1" und "5" werden gleich oft gewürfelt.

a) Um welchen Zufallsversuch handelt es sich? Verwenden Sie dabei stochastische Grundbegriffe.

b) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert/Mittelwert, die Varianz und Standardabweichung für diesen Zufallsversuch.

d) Welche Wahrscheinlichkeit besteht beim 61. Wurf für die Seite "4" ?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ereignis: "die Seite 2 oder eine höhere Seite" gewürfelt?

3.1.3 Aufgabe

(Jäger und Hase) Zwei Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig voneinander auf einen Hasen. Der erste Jäger trifft durchschnittlich mit der Wahrscheinlichkeit 30%, der Zweite mit einer von 50%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Hase getroffen?

3.1.4 Aufgabe

(Die Teletubbies) In einer riesigen Lostrommel (mit sehr vielen Losen) befinden sich 10% Gewinnlose und 90% Nieten. Sie wollen solange jeweils ein Los kaufen, bis Sie ein Gewinnlos für einen "Teletubbie" gezogen haben. Sie können jedoch nicht mehr als drei Lose kaufen.

a) Mit welcher Ausgabe müssen Sie rechnen, falls ein Los 3 € kostet?

b) Falls der "geloste" Teletubbie beim Losen durchschnittlich mehr als 35 € kostet sollte man besser im Spielwarenladen kaufen! Der Lospreis soll nun neu festgelegt werden. Ab welchem Preis für ein einzelnes Los sollte man besser gleich in den Laden gehen?

3.1.5 Aufgabe

(Eishokey-Meisterschaft) Im Finale der Deutschen Eishokeymeisterschaft stehen die Gelnhäuser Huskies (Siegwahrscheinlichkeit für jedes Spiel 30%) und die Frankfurter Lions. Gespielt wird im Best-of-five-Modus, d.h. die Mannschaft, die zuerst drei Spiele gewonnen hat, ist Deutscher Meister (weitere Spiele gibt es dann nicht mehr – sämtliche Eintrittskarten verlieren ihre Gültigkeit). Unentschieden gibt es nicht.

a) Beschreiben Sie kurz den Zufallsversuch (Stufen, Merkmale, Laplace ...?)

b) Skizzieren Sie das zugehörige, vollständige Baumdiagramm, aber beschriften Sie nur einen einzigen "langen" Pfad mit sämtlichen Zahlen und Rechenwegen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Meisterschaft nach dem vierten Spiel entschieden ist.

3.1.6 Aufgabe

(Dosenwurf) Peter wirft an einem Kirmesstand in Gelnhausen viel Mal hintereinander einen Ball auf eine Dose (wird immer wieder aufgestellt). Wir unterscheiden Treffer T und Nichttreffer N. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beträgt $0,4$.

a) Um welchen Zufallsversuch handelt es sich? Geben Sie den Ergebnisraum S an. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten. Welche Ergebnisse umfasst das Ereignis E_1: *Mindestens ein Wurf ist ein Treffer*?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1: *Hauptgewinn (4 Treffer)* und das Ereignis E_2: *Genau ein Wurf ist ein Treffer* .

3.1.7 Aufgabe

(Telefonterror) Nach Angaben der Zeitschrift *Connect* kommen 30% aller Internet-Telefongespräche beim ersten Anwählen nicht zustande. Sie müssen 8 Telefonate erledingen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie
E_1: *jedes Mal durchkommen*, E_2: *zwei Mal nicht durchkommen*, E_3: *mehr als zweimal nicht durchkommen.*

3.1.8 Aufgabe

"Interpretieren" Sie jede Darstellung als Zufallsversuch und nennen Sie die wichtigsten stochastischen Begriffe! Was lässt sich alles "ablesen"?

a) $P(2;2;2;1) = \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{6}$

b) $P(X = 12) = ? \cdot 0,01^{12} \cdot 0,99^6$

c) $P(rot;\, blau;\, rot) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

3.1.9 Aufgabe

Auf einem Autobahnabschnitt der A66 halten sich im Durchschnitt 70% aller Pkw-Fahrer an die Geschwindigkeitsbegrenzung von 60 km/h. Die Polizei will nun von 9 zufällig ausgewählten Pkw die Geschwindigkeit messen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0, 1, 2, ..., 9 Fahrer sich an die Geschwindigkeitsbegrenzung halten?

3.1.10 Aufgabe

Der Spieler A besitzt einen regulären Oktaeder, von dessen acht Flächen drei die Zahl 1, vier die Zahl 2 und eine die Zahl 3 tragen. Die Laplace-Annahme sei erfüllt.

a) A "oktaedert" sechsmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er

   aa) die Zahl 1 genau fünfmal wirft;

   ab) die Zahl 2 mindestens zweimal wirft.

b) Der Oktaeder wird nun zweimal geworfen. Stellen Sie alle möglichen Ergebnisse in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

   E_1: Die Augensumme ist 3;

   E_2: Die Augenzahl des ersten Wurfs ist kleiner als die des zweiten Wurfs.

c) Der Oktaeder wird dreimal geworfen und nach jedem Wurf die erzielte Augenzahl notiert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Reihenfolge der Zahlen $1;\ 2;\ 3$ auftritt?

d) Zu dem Spieler A gesellt sich der Spieler B mit einem Laplace-Tetraeder, auf dessen vier Seitenflächen die Zahlen $0,\ 1,\ 2$ und 3 angebracht sind.

   da) Beide vereinbaren folgendes Spiel:

   A "oktaedert" einmal, dann "tetraedert" B einmal. Gewonnen hat, wer die höhere Zahl erzielt. Bei gleicher Zahl endet das Spiel unentschieden (Remis).

   Es werden folgende Ereignisse definiert:

   A: "Spieler A gewinnt"

   B: "Spieler B gewinnt"

   C: "Remis"

   Berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$. Welcher Spieler ist im Vorteil?

   db) Die Spielregel wird nun wie folgt erweitert: Bei Remis wird das Spiel wiederholt. Gewinnt der Spieler A, erhält er von dem Spieler B 8 €. Auf lange Sicht soll der Gewinn der beiden Spieler gleich hoch sein. Welchen Betrag muss A daher zahlen, wenn B gewinnt?

e) Nach einer anderen Spielregel "oktaedert" nur jeweils einer der Spieler. der andere bekommt von ihm einen Einsatz a und zahlt den Gewinn aus.

   Es gilt folgende Spielregel:

   > Der Spieler hat bei Spielbeginn beim Mitspieler ein Guthaben von a €. Der Spieler "oktaedert" zweimal. Ist das Ergebnis beim ersten Mal eine 3, so verdoppelt sich sein Guthaben. Bei einer 1 oder 2 ändert sich das Guthaben nicht. Beim 2. Mal wird die Ergebniszahl in € vom aktuellen Guthaben subtrahiert. Danach wird das Endguthaben an den Spieler ausgezahlt.

   Bei welchem Einsatz ist das Spiel auf lange Sicht fair?

3.1.11 Aufgabe

Eine Urne enthalte sechs Kugeln auf die je genau eine Zahl aufgedruckt ist. Auf zwei Kugeln ist die Zahl 2*, auf eine die Zahl* 3 *aud auf drei Kugeln die Zahl* 6 *aufgedruckt.*

Ein Zufallsexperiment besteht im zweimaligen Ziehen einer Kugel, die dabei nach erfolgreicher Ziehung jeweils wieder zurückgelegt werden soll. Die Zufallsgröße X *beschreibt die dabei ermittelte Augensumme.*

a) Gib ein Baumdiagramm (beschriftet) zum Zufallsexperiment und anschließend die Wahrscheinlichkeitsverteilung (Tabelle) der Zufallsgröße X an.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

- Ereignis A: Es werden zwei gleiche Zahlen gezogen.
- Ereignis B: Die Summe der Zahlen ist kleiner als sieben
- Ereignis C: A und B treten ein.

Gib alle Ergebnisse an, die zum Eintreten des Gegenereignisses $\overline{C}$ vom Ereignis C führen.

Aus einer Urne wird erneut mit Zurücklegen gezogen.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Ziehungen mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl 6 gezogen wird.

d) Wie oft muss die Ziehung mindestens durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Kugel mit der Zahl 6 gezogen wird, größer als 95% wird?

e) Ermittle rechnerisch, was wahrscheinlicher ist:

- bei drei Ziehungen mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl 6 zu ziehen oder
- bei sechs Ziehungen mindestens zweimal eine Kugel mit der Zahl 6 zu ziehen.

Jetzt wird aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim dreimaligen Ziehen genau zweimal eine 6 gezogen. Gib auch ein beschriftetes Baumdiagramm an.

Die Urne wird für ein Glücksspiel benutzt. Der Spielleiter vereinbart mit einem Glücksspieler folgende Spielregel: Für ein Spiel muss der Glücksspieler einen Einsatz von 5 € *leisten. Zieht er dann eine Kugel mit der Zahl* 3*, dann erhält der Glücksspieler* 11 € *vom Spielleiter, zieht er eine Kugel mit der Zahl* 2 *so erhält er* 5 €*, andernfalls gibt es keine Auszahlung.*

g) Mit welchem Gewinn kann ein Glücksspieler langfristig rechnen?

h) Bei welchem Einsatz (€) des Glücksspielers würde langfristig keiner von beiden bevorteilt sein?

Jemand möchte sich eine sechsstellige Geheimzahl erstellen. Er nimmt dazu alle Kugeln aus der Urne und legt sie hintereinander.

i) Wie viele verschiedene Geheimzahlen können auf diese Weise entstehen?

4 Analytische Geometrie und Lineare Algebra

4.1 Punkte und Geraden

4.1.1 Aufgabe

Prüfe, ob die Punkte auf einer Geraden liegen: $A\big(2\,;\,3\,;\,-1\big)$, $\quad B\big(4\,;\,-1\,;\,5\big)$, $\quad P\big(3\,;\,1\,;\,2\big)$

4.1.2 Aufgabe

Gegeben sind $A\big(2\,;\,5\,;\,-2\big)$, $\quad B\big(5\,;\,2\,;\,1\big)$, $\quad C\big(-1\,;\,-2\,;\,-1\big)$, $\quad D\big(-4\,;\,1\,;\,-4\big)$.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist!

b) Prüfen Sie, ob das Parallelogramm ein Rechteck ist!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms!

4.1.3 Aufgabe

Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder gleichseitig ist! $\quad A\big(3\,;\,7\,;\,2\big)$, $\quad B\big(-1\,;\,5\,;\,1\big)$, $\quad C\big(2\,;\,3\,;\,0\big)$.

4.1.4 Aufgabe

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden!

a) $g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad k:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

4.2 Ebenen

4.2.1 Aufgabe

Gegeben sind: $\quad P\big(0\,;\,1\,;\,2\big)$, $\quad Q\big(2\,;\,0\,;\,4\big)$, $\quad R\big(4\,;\,8\,;\,0\big)$ $\qquad$ B) $\quad P\big(1\,;\,1\,;\,1\big)$, $\quad Q\big(2\,;\,2\,;\,3\big)$, $\quad R\big(10\,;\,4\,;\,6\big)$

a) Zeigen Sie, dass die gegebenen Punkte die Lage von Ebenen bestimmen!

b) Bestimmen Sie die Ebenengleichungen in Parameterform, Koordinatenform und Hesse Form!

c) Untersuchen Sie die Lage der Ebenen zueinander!

4.2.2 Aufgabe

Gegeben sind eine Gerade g durch einen Punkt A und durch einen Richtungsvektor $\vec{v}$ sowie eine Ebene $\mathbb{E}$ durch eine Koordinatengleichung. Bestimme den Schnittpunkt von Gerade und Ebene!

a) $A(1\,;\,2\,;\,3) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}:\quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6$

b) $A(2\,;\,-1\,;\,1) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}:\quad x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$

4.2.3 Aufgabe

Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und R von der Ebene $\mathbb{E}$!

a) $P(2\,;\,-1\,;\,2)$ $\quad R(0\,;\,0\,;\,0)$ $\quad \mathbb{E}: \; 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

b) $P(1\,;\,0\,;\,1)$ $\quad R(0\,;\,0\,;\,0)$ $\quad \mathbb{E}: \; x_1 - x_2 + x_3 = 9$

4.3 Vermischte Aufgaben

4.3.1 Aufgabe

Die Eckpunkte eines Produktionsgebäudes, das die Form eines Pyramidenstumpfes hat, sind durch ihre Koordinaten gegeben (1LE = 10m):

$A\big(0\,;\,0\,;\,0\big)$; $B\big(12\,;\,0\,;\,0\big)$; $C\big(12\,;\,8\,;\,0\big)$; $D\big(0\,;\,8\,;\,0\big)$; $E\big(\frac{9}{2}\,;\,3\,;\,12\big)$; $F\big(\frac{15}{2}\,;\,3\,;\,12\big)$; $G\big(\frac{15}{2}\,;\,5\,;\,12\big)$; $H\big(\frac{9}{2}\,;\,5\,;\,12\big)$;

a) Stelle das Gebäude graphisch dar.

b) Zeige, dass sich die Geraden AE und BF, die durch die Gebäudekanten verlaufen, in einem Punkt S schneiden. Gib die Koordinaten von S an.

c) Die Mittelpunkte der Gebäudekanten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{FG}$ heißen M_1 bzw. M_2. Zeige, dass die Verbindungsgerade M_1M_2 senkrecht zu den Kanten $\overline{BC}$ und $\overline{FG}$ verläuft. Welchen Abstand haben die Punkte M_1 und M_2?

d) Die Seitenfläche $BCGF$ des Gebäudes soll zu einem Quadratmeterpreis von 35 € verkleidet werden. Berechne die Kosten der Verkleidung.

e) Gib die Gleichung der Ebene K in Normalenform an, welche die Gebäudefläche mit den Eckpunkten $BCGF$ enthält.

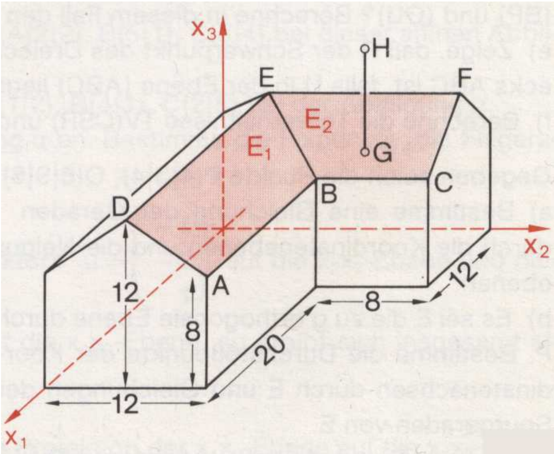
f) Welchen Winkel bildet die Gerade, auf der die Gebäudekante AE liegt, mit der Ebene K?

g) Auf einem Mast ist ein beweglicher Flutlichtstrahler L befestigt. Seine Lage im Koordinatensystem ist $L(14\,;\,4\,;\,8)$. Sein Strahlengang (Zentrum des Lichtkegels) lässt sich durch eine Geradenschar g_a beschreiben. Es gilt

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; \qquad a \in [-18\,;\,3]$$

Weise nach, dass die Geraden LM_1 und LM_2 zur Geradenschar gehören, dass also M_1 und M_2 zentral vom Lichtkegel getroffen werden können. Welche Werte haben die zugehörige Parameter a?

4.3.2 Aufgabe



In der Abbildung ist das Schrägbild eines Winkelhauses in ein kartesisches Koordinatensystem eingepaßt. Aus den Maßangaben (in m) kann man die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E, F bestimmen und damit Gleichungen der *Dachebenen* $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ gewinnen.

a) Bestimme die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E, F und zeichne das Haus in ein Koordinatensystem ein!

b) Gib für die Ebenen $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ Parametergleichungen an.

c) Gib für die Ebenen $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ Koordinatengleichungen an.

d) Unter welchem Winkel schneiden sich die $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ längs der Dachkehle BE?

e) Wie lang ist die Dachkehle BE?

f) Welchen Neigungswinkel hat die Dachkehle BE gegenüber der Grundrißebene (x_1x_2-Ebene)?

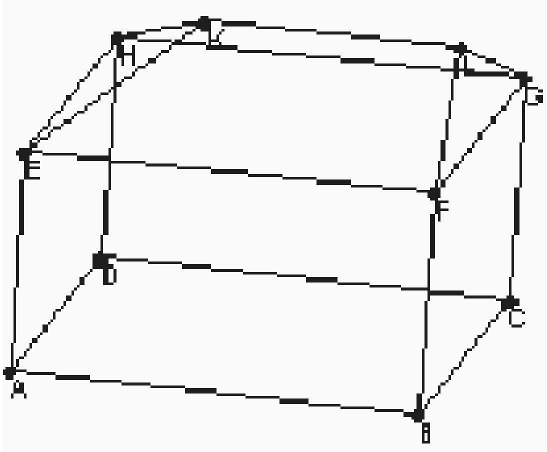
Die Antenne GH hat die Spitze $H(8\,;\,14\,;\,16)$.

g) Bestimme die Koordinaten des Antennenfußpunktes G und zeichne die Antenne in das vorhandene Koordinatensystem ein.

h) Kann man die Antenne vom Punkt $P(41\,;\,-7\,;\,1)$ aus sehen?

i) Bei Sonneneinstrahlung in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ wirft die Antenne einen Schatten auf das Dach des Hauses. Berechne den Schatten der Spitze H auf der Dachebene $\mathbb{E}_1$.

4.3.3 Aufgabe



Auf einem leicht abschüssigen Gelände W soll ein Wohnhaus mit Keller-, Erd- und Obergeschoss errichtet werden. Als Dachform wird aus energietechnischen Gründen ein unsymmetrisches Walmdach gewählt. In Absprache mit dem Bauherren legt der Architekt ein geeignetes Koordinatensystem fest: Rechtssystem, x_1-Achse als Winkelhalbierende der beiden anderen Achsen.

x_1-Achse: 4E $= \sqrt{2}\,cm$
x_2-Achse: 2E $= 1\,cm$
x_3-Achse: 2E $= 1\,cm$
1E $= 1\,m$ (alle Werte in Meter).

1. **Das Haus:**

   Die Bodenplatte des Hauses hat die Koordinaten $A(6\,;\,2\,;\,-3)$, $B(6\,;\,18\,;\,-3)$, $C(-4\,;\,18\,;\,-3)$ und $D(-4\,;\,2\,;\,-3)$. Von der Bodenplatte bis zur Dachtraufe ist das Haus $9\,m$ hoch. Die Eckpunkte des Dachfirstes sind $K(-2\,;\,6\,;\,8)$ und $L(-2\,;\,16\,;\,8)$.

   a) Gib die Koordinaten der oberen Eckpunkte der Hauswände an.
   b) Stelle das Haus in dem beschriebenen Koordinatensystem dar.

2. **Das Dach des Hauses:**

   Das Gebälk wird in einer Zimmerei vorbereitet. Dazu werden u. a. folgende Maße benötigt:

   a) Die Länge ℓ der Dachkante EK.
   b) Der Abstand d des Firstpunktes K von der Hauskante EH
   c) Der Winkel α, den die beiden großen Dachflächen D_1 und D_2 bilden.
   d) Die Fläche F_D des Dachteils EKH (Vorschlag: elementargeometrische Methoden verwenden).

3. **Das Haus im Gelände:**

   Im Rahmen seiner Vermessungs- und Planungsarbeiten hat der Architekt des Gelände im Bereich des Hauses (idealisiert) durch folgende Gleichung abgebildet:

   $$\mathbb{W}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   In welchen Punkten schneiden (durchstoßen) die senkrechten Hauskanten die Geländeebene $\mathbb{W}$? In welchem Geschossbereich liegen diese Punkte?

4. **Der PKW-Stellplatz am Haus:**

   Vor der Hausfläche $BCGF$ soll das Gelände für einen PKW-Stellplatz geebnet werden. Dieser Bereich liegt nach Vorschlag des Architekten in einer Ebene mit der Gleichung

   $$\mathbb{U}:\ 2x_1 - 4x_2 - 21x_3 = -47\,.$$

   a) Um die gewünschte Stellplatzfläche zu erhalten, muss das Gelände teilweise abgetragen, teilweise aufgefüllt werden. Gesucht ist eine Gleichung fr die Trennungslinie t beider Gebiete.
   b) Welche Koordinaten hat ein Punkt S_1 auf dieser Trennungslinie in einer Entfernung von $7\,m$ von der Hausfläche $BCGF$?
   c) Welchen Winkel β bildet die Hausfläche $BCGF$ mit der Stellfläche $\mathbb{U}$?
   d) Die Hausfläche $BCGF$ und die Stellplatzfläche haben die Punkte $S_2(2\,;\,18\,;\,-1)$ und $S_3(5\,;\,18\,;\,-\frac{5}{7})$ gemeinsam. Der Bauherr erwägt, die Koordinate x_3 des Stellflächenpunktes S_1 so zu verändern, dass eine Stellplatzfläche durch die Punkte S_1, s_2 und S_3 entsteht, die senkrecht zur Hauswand verläuft? Berechne die entsprechenden Koordinate x_3 und auch die Gleichung $\mathbb{N}$ dieser neuen Stellplatzfläche.