Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 11.02.2004

__Hinweis__: Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal bzw. Geodreieck).

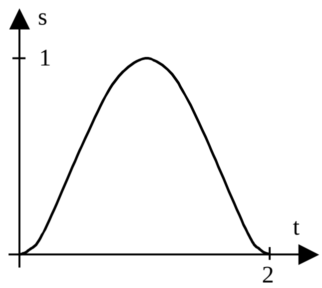
1. a) Ein Zug verlässt A-Stadt um 9 Uhr und erreicht B-Stadt um 12 Uhr.
Ein anderer Zug verlässt B-Stadt um 10 Uhr und erreicht A-Stadt um 12 Uhr.
Zeichnen Sie den Zugverkehr in ein Weg-Zeit-Diagramm!
Berechnen Sie, um welche Uhrzeit sich die Züge begegnen, wenn beide auf der gleichen Verbindungsstrecke mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

b) Wenn Nelly auf dem Fahrrad mit 10 km/h zur Arbeit fährt, kommt sie eine Minute zu spät.
Wenn sie mit 12 km/h fährt, ist sie eine Minute zu früh am Arbeitsplatz.
Wie lang ist ihr Weg zur Arbeit?

c) Der Weg *s* eines Autos nach der Zeit *t* ist
$s = t^4 - 4t^3 + 4t^2,\ 0 \le t \le 2$.

(i) Wann fährt der Wagen vorwärts, zu welcher Zeit fährt er rückwärts?

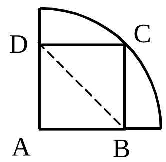
(ii) Wann hat die Fahrerin vermutlich den Fuß auf dem Gaspedal und wann bremst sie?



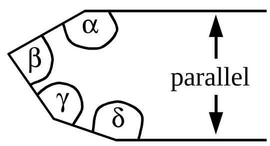
Hinweis: Die Geschwindigkeit *v* ist die Ableitung des Weges *s* nach der Zeit *t*: $v(t) = s'(t)$;
v ist also die Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Funktion.
Die Beschleunigung *a* ist die Ableitung der Geschwindigkeit *v* nach der Zeit: $a(t) = v'(t)$.

---

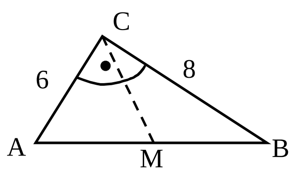
2. a) Einem Viertelkreis mit Radius 1 ist ein Quadrat ABCD einbeschrieben. Bestimmen Sie BD!



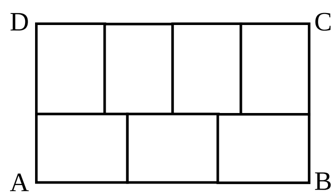
b) Berechnen Sie die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta$!

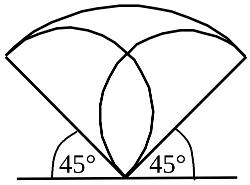


c) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Katheten der Länge 6 und 8.
M sei der Mittelpunkt der Hypotenuse AB.
Berechnen Sie MC!

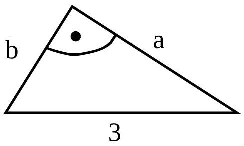


d) Das Rechteck ABCD ist aus 7 kongruenten Rechtecken zusammengesetzt.
Die Fläche des Rechtecks ABCD ist 336 cm^2.
Berechnen Sie den Umfang von ABCD!

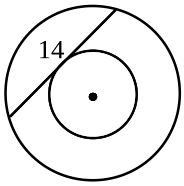




3. a) Beweisen Sie, dass die schraffierten Flächen zwischen den Kreisbögen gleich sind!



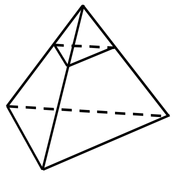
b) Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 3 und den Katheten a und b gilt $a + b = \sqrt{17}$.
Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks!



c) In einem Kreisring hat die Sehne, die den inneren Kreis berührt, die Länge 14.
Berechnen Sie die Fläche des Kreisringes!

---

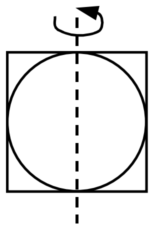
4. a) Die Oberfläche eines Würfels ist 54 cm^2. Berechnen Sie sein Volumen!



b) Starten Sie mit einem Tetraeder.
1. Schritt: Teilen Sie jede Kante in 3 Teile.
2. Schritt: Verbinden Sie diese Dreiteilungspunkte so, dass an jeder Ecke ein Tetraeder entsteht.
3. Schritt: Schneiden Sie jedes dieser Tetraeder ab.
4. Schritt: Wenden Sie die Schritte 1 bis 3 auf den neuen Körper an.

(i) Wie viele Ecken und Kanten hat der Körper nach dem 3. Schritt?

(ii) Wie viele Flächen hat der Körper nach dem 4. Schritt?

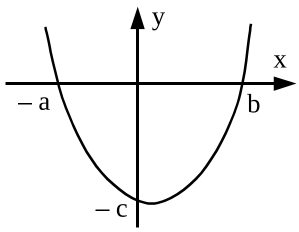


c) Ein Quadrat (Kantenlänge 2) und sein Inkreis rotieren um eine Mittellinie. Dabei entsteht ein Zylinder und eine Kugel.
Berechnen Sie die Oberfläche der Kugel und die Mantelfläche des Zylinders!

---

5. a) Wie muss man c in $y = 3x - x^2 + c$ wählen, damit die Parabel die x-Achse berührt?

b) Alle Parabeln der Form $y = x^2 + 2ax + a$, wobei a reell ist, gehen durch einen Punkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses gemeinsamen Punktes!
Auf welcher Kurve liegen die Scheitel dieser Parabelschar?



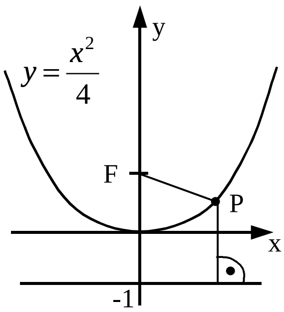
c) Die Parabel $y = x^2$ wird so verschoben, dass sie die y-Achse bei – c und die x-Achse bei – a und b schneidet.
Beweisen Sie, dass $a \cdot b = c$ gilt!

---

6. a) Für welche Winkel a mit $0 \le a \le 180°$ gilt $\dfrac{1}{2 + \cos^2 a} = \dfrac{4}{11}$?

b) Zeigen Sie, dass $y = 4x + 11$ Tangente an $f(x) = \dfrac{16}{x^2} - 1$ ist !

c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt P der Parabel $y = \dfrac{x^2}{4}$ zum Punkt F(0 | 1) den gleichen Abstand hat wie zur Geraden $y = -1$!



7. a) Wie viele vierstellige natürliche Zahlen zwischen 1000 und 5000 bestehen aus vier verschiedenen Ziffern?

b) Mit $n!$ wird das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ bezeichnet, z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Für welche n endet $n!$ auf genau vier Nullen?

c) Die geraden natürlichen Zahlen werden zeilenweise in 5 Spalten aufgeschrieben:

	Spalte				
Zeile	1	2	3	4	5
1		2	4	6	8
2	16	14	12	10	
3		18	20	22	24
4	32	30	28	26	
5		34	36	38	40
...	...	...	...	...	

In welcher Zeile und welcher Spalte steht 2004?

8. a) Eine Bäuerin hat 7 Kühe, 8 Schafe und 6 Ziegen. Wie viele Ziegen kann sie dazu kaufen, so dass die Hälfte aller ihrer Tiere Ziegen sind?

b) Die Bevölkerungszahl einer Stadt vergrößert sich um 1200 Menschen. Die neue Population verringert sich um 11%. Nun hat die Stadt 32 weniger Einwohner als vor der Vermehrung um 1200 Personen. Wie groß war die ursprüngliche Bevölkerungszahl?

c) Zur Überprüfung, ob Honigbienen wirklich „bienenfleißig“ sind, soll abgeschätzt werden, wie oft eine Sammelbiene pro Tag ausfliegt. Dazu nehmen wir an, dass bei einem starken Bienenvolk mit 25 000 Sammelbienen pro Tag 5 Kilogramm Nektar eingetragen werden können. Jede dieser Sammelbienen bringt pro Ausflug im Mittel 50 Milligramm Nektar mit. Wie viele Ausflüge sind pro Sammelbiene durchschnittlich nötig?