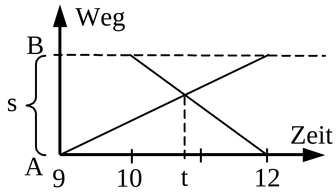
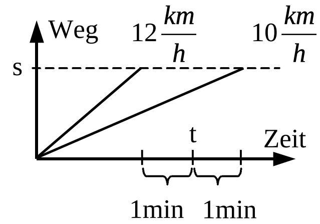
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2004 der Jahrgangsstufe 11

1. a) Es gilt $t \cdot v_1 + (t-1) \cdot v_2 = s$ mit $v_1 = \frac{s}{3}$ und $v_2 = \frac{s}{2}$.

Aus $t \cdot \frac{s}{3} + (t-1) \cdot \frac{s}{2} = s$ folgt $t = \frac{9}{5}$. Also findet die Begegnung nach 108 *min* statt, d.h. um 10:48 Uhr.



b) Aus $s = 12\frac{km}{h} \cdot \left(t - \frac{1}{60}\right)$ und $s = 10\frac{km}{h} \cdot \left(t + \frac{1}{60}\right)$ folgt $s = 2km$.



c) Aus $s' = 4t^3 - 12t^2 + 8t = 0$ folgt $t = 0, 1$ oder 2.

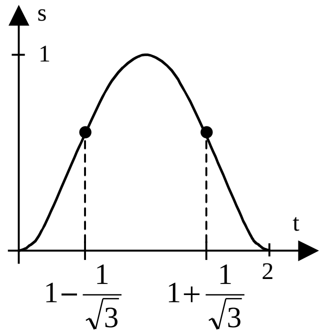
Aus $s'' = 12t^2 - 24t + 8 = 0$ folgt $t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hieraus ergeben sich folgende Zeitintervalle:

(i) Vorwärts (0 ; 1). Rückwärts (1 ; 2).

(ii) Gas geben (0 ; $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$) und (1 ; $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$).

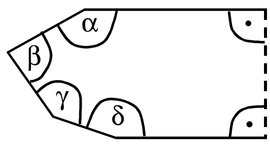
Bremsen ($1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; 1) und ($1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2).



---

2. a) $BD = AC = 1$

b) Aus $a + b + g + d + 2 \cdot 90° = 4 \cdot 180°$ folgt $a + b + g + d = 540°$.



c) $MC = AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = 5$

d) Für die Seiten *a* und *b* der 7 Rechtecke gilt $3a = 4b$ und $3a \cdot (a+b) = 336$. Somit $a = 8$ und $b = 6$ und $5a + 6b = 76$.

---

3. a) Die beiden Halbkreise und der Viertelkreis haben die gleiche Fläche. Daher ist die Fläche, die zu beiden Halbkreisen gehört, genau so groß wie die Fläche außerhalb der Halbkreise.

b) Aus $17 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 9 + 2ab$ folgt $\frac{1}{2}ab = 2$.

c) Seien *r* und *R* die Radien des kleinen und großen Kreises. Dann ist die Fläche des Kreisrings $p \cdot R^2 - p \cdot r^2 = p \cdot (R^2 - r^2) = p \cdot 7^2 = 49p$.

---

4. a) Volumen: $\left(\sqrt{\frac{54}{6}}\right)^3 = 27$.

b) (i) $4 \cdot 3 = 12$ Ecken und $6 + 4 \cdot 3 = 18$ oder $12 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ Kanten.

(ii) Nach dem 3. Schritt gibt es $4 + 4 = 8$ Flächen, also gibt es nach dem 4. Schritt $8 + 12 = 20$ Flächen.

c) Kugeloberfläche: $4p \cdot 1^3 = 4p$

Zylindermantel: $2p \cdot 1 \cdot 2 = 4p$

5. a) Aus $y = 3x - x^2 + c = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + c + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ folgt für die Koordinaten des Parabelscheitels $\left(\frac{3}{2} \mid c + \frac{9}{4}\right)$, also muss $c = -\frac{9}{4}$ sein.

b) Die Parabeln $y = x^2$ (für a = 0) und $y = x^2 + 2x + 1$ (für a = 1) haben den Punkt $\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}\right)$ gemeinsam. Aus $y = x^2 + 2ax + a = (x + a)^2 + a - a^2$ folgt für die Koordinaten $(x \mid y)$ des Scheitels $x = -a$ und $y = a - a^2$. Also liegen die Scheitel auf der Kurve $y = -x^2 - x$.

c) Die verschobene Parabel hat die Gleichung $y = (x + a) \cdot (x - b)$.
Für $x = 0$ gilt $-c = a \cdot (-b)$, also $a \cdot b = c$.

---

6. a) Aus $\frac{1}{2 + \cos^2 a} = \frac{4}{11}$ folgt $\cos^2 a = \frac{3}{4}$ und somit $\cos a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
also $a = 30°$ oder $a = 150°$.

b) 1. Lösung: Aus $f'(x) = -\frac{32}{x^3} = 4$ folgt $x = -2$ und $y = 3$. $(-2 \mid 3)$ liegt auf $y = 4x + 11$.

2. Lösung: Aus $4x + 11 = \frac{16}{x^2} - 1$ folgt $(x + 2)^2 (x - 1) = 0$. $x = -2$ ist doppelte Nullstelle.

c) Für $P\left(a \mid \frac{a^2}{4}\right)$ gilt $FP = \sqrt{a^2 + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^2} = \frac{a^2}{4} + 1$. Abstand von P zur Geraden $y = -1$ beträgt: $\frac{a^2}{4} + 1$.

---

7. a) Auswahl der Ziffern als 4-Stufenprozess: Es gibt $4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2016$ Zahlen mit verschiedenen Ziffern.

b) $n = 20, 21, 22, 23, 24$.

c) In der 3. Spalte stehen 4, 12, 20, 28, ... , d.h. $8n - 4$. Wegen $2004 = 8 \cdot 251 - 4$ steht 2004 in der 251. Zeile (und der 3. Spalte).

---

8. a) Sei x die Anzahl der neu gekauften Ziegen. Dann gilt $\frac{1}{2} \cdot (7 + 8 + 6 + x) = 6 + x$, also $x = 9$.

b) Sei x die ursprüngliche Anzahl der Einwohner. Dann gilt $x - (x + 1200) \cdot \frac{89}{100} = 32$, also $x = 10000$.

c) Sei n die durchschnittliche Zahl der täglichen Ausflüge einer Sammelbiene. Dann gilt $50 \cdot 10^{-3} \cdot 25000 \cdot n = 5000$, also $n = 4$.