Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 16.02.2005

__Hinweis:__ Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck).

1. a) Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,-8)$, $B(-1\,|\,3)$ und $C(5\,|\,3)$.
Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt *M* der Strecke *AC* ?
Spiegeln Sie *B* an *M* nach *D*. Welche Koordinaten hat *D* ?
Warum ist das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm?

b) Zeichnen Sie im Koordinatensystem alle Punkte $(x\,|\,y)$ mit

(i) $y = |x+1|$

(ii) $x^2 - y^2 = 0$

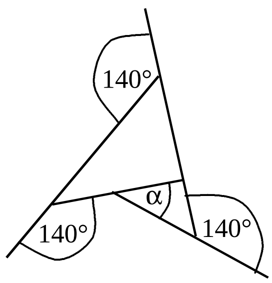
(iii) $x^2 + x \cdot y = 2x + 2y$

(iv) $|x| + |y| = 1$

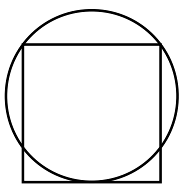
c) Gegeben sind die Punkte $A(-1\,|\,0)$ und $B(1\,|\,0)$ sowie die Gerade $y = 3$.
Wenn ein Punkt *C* die Gerade durchläuft, wie bewegt sich dann der Schnittpunkt *S* der Seitenhalbierenden des Dreiecks *ABC* ?

---

2. a) Wie groß ist der Winkel α in der Abbildung?

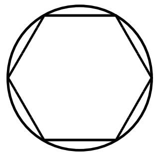


b) Das abgebildete Quadrat hat die Seitenlänge 2.
Wie groß ist der Kreisradius?

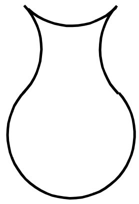


c) Ein Rechteck hat die Fläche 3 und den Umfang 7.
Wie lang sind seine Diagonalen?

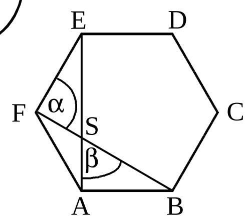
3. a) Der Umkreis eines regelmäßigen Sechsecks habe die Fläche 20π.
Welche Fläche hat das Sechseck?



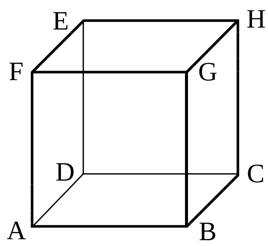
b) Die vasenförmige Figur besteht aus drei Viertelkreisen und einem Dreiviertelkreis; alle haben den Radius 1 und die Mittelpunkte sind die Ecken eines Quadrates.
Welche Fläche hat die Figur?



c) In einem regelmäßigen Sechseck ABCDEF sei S der Schnittpunkt von AE und BF.
Wie groß sind die Winkel $\alpha = \sphericalangle$ BFE und $\beta = \sphericalangle$ ASB ?



4. Gegeben ist ein Würfel mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G und H.



a) Wie groß ist das Würfelvolumen und die Würfeloberfläche, wenn die Raumdiagonale AH = 1 ist?

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Raumdiagonalen AH und BE? Berechnen Sie den Kosinus dieses Winkels.

c) Seien P und Q die Mitten der Kanten AD bzw. GH. Wenn der Würfel die Kantenlänge 2 hat, welche Fläche hat dann das Viereck PCQF ?

d) Die Eckpunkte A, C, G, E des Würfels bilden ein Tetraeder. Seien P und Q die Mitten der Tetraederkanten AC bzw. GE. Wie lang ist der kürzeste Weg von P nach Q auf der Oberfläche des Tetraeders, wenn der Würfel die Kantenlänge 1 hat?

5. a) Palindrome sind symmetrische Zahlen wie z. B. 1331, 222, 45054. Wie viele vier- und fünfstellige Palindrome gibt es?

b) Die ersten beiden Glieder einer Folge seien *a* und *b*. Jedes neue Folgenglied ergibt sich, in dem das vorangegangene Glied durch das Glied davor geteilt wird; das 3. Glied ist also $\frac{b}{a}$.
Berechnen Sie die ersten acht Glieder der Folge. Welches ist das 2005. Folgenglied?

c) Für welche natürliche Zahl *n* gilt $\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n} = \dfrac{115}{116}$?

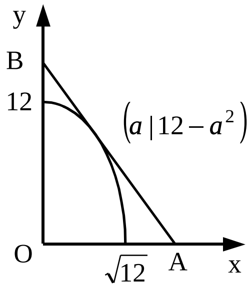
6. a) Gegeben seien für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ die vier Funktionen

$f_1(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ $\qquad f_2(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$

$f_3(x) = (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)$ $\qquad f_4(x) = (1 - \sin x) \cdot (1 + \tan x) \cdot (1 + \sin x) \cdot (1 - \tan x)$

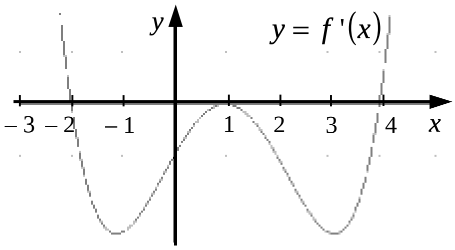
Welche der vier Funktionswerte $f_1\left(\frac{\pi}{13}\right), f_2\left(\frac{\pi}{13}\right), f_3\left(\frac{\pi}{13}\right)$ und $f_4\left(\frac{\pi}{13}\right)$ sind gleich?

b) Gegeben sei $f(x) = 12 - x^2$, $x \ge 0$. Sei F(a) die Fläche des Dreiecks ABO, das von der Tangente in $(a \mid 12 - a^2)$ und den Koordinatenachsen gebildet wird. Berechnen Sie F(1) und F(3). Für welches a ist F(a) am kleinsten?



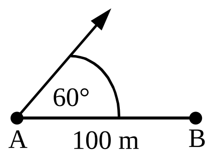
c) Sei $f(x) = x^3 - 7x + 6$, x reell. Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Kurvenpunkte mit waagerechten Tangenten. Zeigen Sie, dass f punktsymmetrisch zu $(0 \mid 6)$ ist.

7. a) Die Abbildung zeigt den Graphen von $f\,'$, der Ableitung einer Funktion f im Intervall $-3 < x < 5$. Für welche x hat f waagerechte Tangenten? Angenommen $f(1) = 0$. Skizzieren Sie den Graph von f für $0 < x < 2$.



b) Im Koordinatensystem sind die Punkte $R(0 \mid 1)$ und $S(p \mid q)$ gegeben. Der Kreis mit Durchmesser RS schneide die x-Achse in x_1 und x_2. Vergleichen Sie x_1 und x_2 mit den Lösungen von $x^2 - px + q = 0$.

c) Zwei Schlittschuhläufer, Anton und Bernd, befinden sich in den Punkten A und B, die auf einem zugefrorenen See 100 m voneinander entfernt sind. Anton startet mit 8 m pro Sekunde auf einer Geraden, die mit AB einen 60°-Winkel bildet. Zum selben Zeitpunkt startet Bernd mit 7 m/s, und zwar auf einer Geraden so, dass er zum möglichst frühen Zeitpunkt Anton trifft. Wie viel Meter läuft Anton, bis er auf Bernd trifft?



8. a) Die Anzahl der Bakterien in einer Schale verdreifacht sich alle 20 Sekunden. Nach drei Minuten sind 275 562 Bakterien in der Schale. Wie viele Bakterien waren es zu Beginn des Experiments?

b) Ein Kaufmann bekommt beim Einkauf einen Massenrabatt von 25% auf den offiziellen Großhandelspreis. Er möchte die Ware so auspreisen, dass er beim Verkauf einen Preisnachlass von 20% geben kann und trotzdem noch ein Drittel mehr bekommt als er bezahlt hat. Wie viel Prozent des Großhandelspreises beträgt der ausgewiesene Verkaufspreis?

c) In einem dunklen Raum befindet sich ein Wäschetrockner mit 20 roten, 16 grünen, 12 gelben und 8 schwarzen Socken. Samuel zieht eine Socke nach der anderen aus dem Trockner, ohne die Farbe erkennen zu können. Welches ist die kleinste Anzahl von Socken, die er rausnehmen muss, um sicher zu sein, mindestens 10 Paare zu haben? (Ein Paar Socken sind zwei Socken der gleichen Farbe.)