Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 14.02.2007

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2007 unter http://www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW11.

1. a) Berechnen Sie die Fläche des Vierecks $A(-4\,|\,-1)$, $B(3\,|\,-1)$, $C(3\,|\,0)$, $D(1\,|\,3)$.
Welche Gleichung hat die Gerade durch D, die das Viereck in zwei flächengleiche Teile zerlegt?

   b) Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,0)$ und $B(3\,|\,5)$. Wie muss ein Punkt $C(0\,|\,c)$ gewählt werden, damit das Dreieck ABC rechtwinklig ist?
Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen, da der rechte Winkel bei A, B oder C liegen kann.

---

2. a) Für die Lösungen a und b der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x + q = 0$ gilt $a^3 + b^3 = 81$.
Berechnen Sie q. Hinweis: Es gilt $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

   b) Die natürlichen Zahlen sind in folgendem Zahlenschema angeordnet:

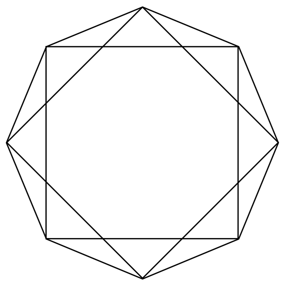
1. Zeile			4						10					
2. Zeile		3		5				9		11				…
3. Zeile	2				6		8				12		14	
4. Zeile	1					7						13		

In welcher Zeile steht 2007 ?

   c) Für die reellen Zahlen x, y und z gilt $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 0$.
Berechnen Sie $x^2 + y^2 + z^2$.

---

3. a) In einem Achteck werden diejenigen Ecken miteinander verbunden, zwischen denen genau eine Ecke liegt. Dadurch entsteht in der Mitte ein kleineres Achteck. Wenn die Seitenlänge des großen Achtecks 1 ist, wie lang ist dann die Seite des kleinen Achtecks?



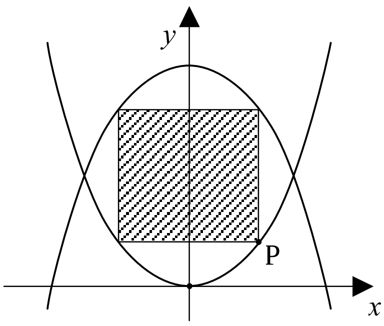
   b) Die Seiten eines Dreiecks sind 6, 8 und n lang, wobei n eine ganze Zahl ist.

   (i) Wie viele solcher Dreiecke gibt es, d.h. für welche n gelten die Dreiecksungleichungen?

   (ii) Für welches n hat das Dreieck maximale Fläche?

   (iii) Für welche n ist das Dreieck stumpfwinklig?

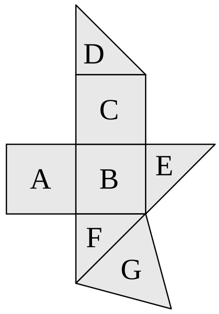
4. Die beiden Parabeln $y = x^2$ und $y = 6 - x^2$ begrenzen ein Gebiet, in dem ein Rechteck liegt, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und dessen Ecken auf den Parabeln liegen.
Wie muss die Ecke P im 1. Quadranten gewählt werden, damit das Rechteck maximale Fläche hat?
Wie groß ist die maximale Fläche?



Hinweis: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung ist die Formel
$3b^2x - a^2x^3 = \frac{2b^3}{a} - \left(x - \frac{b}{a}\right)^2 \left(a^2x + 2ab\right)$ hilfreich.

---

5. Die abgebildete Figur besteht aus drei Quadraten A, B, C mit der Seitenlänge 1, drei rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken D, E, F und einem gleichseitigen Dreieck G.
Die Figur kann zu einem Körper gefaltet werden, der A, B, C, D, E, F und G als Flächen hat.



a) Wie viele Ecken und Kanten hat der Körper?

b) Berechnen Sie die Oberfläche des Köpers.

c) Wie groß ist das Volumen des Körpers?

---

6. a) Für welche b hat $y = 2x^2 - bx + 8$ genau eine Nullstelle?

b) Für die Funktion $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ gilt $f(-3) = 2$. Berechnen Sie $f(3)$.

c) Die Funktion f ist für alle ganzen Zahlen n definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} n+3, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \\ \frac{n}{2}, & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Für welche n gilt $f(f(f(n))) = 27$?

---

7. a) Wie viele 3-stellige Zahlen gibt es?

b) Wie viele 3-stellige Zahlen enthalten jede der Ziffern 2, 6 und 8 genau einmal?
Wie viele dieser Zahlen sind durch 4 teilbar?

c) Wie viele 3-stellige Zahlen haben mindestens eine 7 als Ziffer?

---

8. a) Für welche natürliche Zahl n gilt $\log_{10}(225!) - \log_{10}(223!) = 1 + \log_{10}(n!)$?

b) Milena und Manuel laufen mit konstanter Geschwindigkeit, aber Milena ist k-mal schneller als Manuel ($k > 1$). Milena gibt Manuel einen Vorsprung von m Metern.
Welche Strecke s muss Milena laufen um Manuel einzuholen?
Geben Sie s als Funktion von k und m an.