



1. Gleichungen (mit und ohne Parameter)

1.1

$$3x + 4 = 7$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

1.2

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3$$

1.3

$$2 \cdot 2^x = 16$$

$$2^x = 8$$

$$x = \log_2 8$$

$$x = 3$$

1.4

$$4x^5 + 24x^4 + 21x^3 = 49x^2$$

$$x^2(4x^3 + 24x^2 + 21x - 49) = 0$$

$$x_{1/2} = 0$$

Probieren mit ganzzahligen Teilern des Absolutgliedes führt zur dritten Nullstelle:

$$x_3 = 1$$

$$\begin{array}{r} (4x^3 + 24x^2 + 21x - 49) : (x - 1) = 4x^2 + 28x - 49 \\ - (4x^3 - 4x^2) \\ \hline 28x^2 + 21x \\ - (28x^2 - 28x^2) \\ \hline (49x^2 - 49) \\ - (49x^2 - 49) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4x^2 + 28x - 49 = 0$$

$$x^2 + 7x - \frac{49}{4} = 0;$$

$$x_{4/5} = -3,5$$

1.5

$$\frac{1}{x-5} = 0$$

Die Definitionslücke (Nennernullstelle) liegt bei $x = 5$.
Zähler wird Null gesetzt \Rightarrow keine Nullstellen



1.6

$$x^2 - 2tx + t^2 = 0$$

$$(x - t)^2 = 0$$

$$x_{1/2} = t$$

Man könnte aber auch die pq-Formel ($p = -2t$, $q = t^2$) oder die abc-Formel anwenden.

1.7

$$\sin 6x = 0$$

$$6x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

1.8

$$2e^x = 2$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

1.9

$$-\frac{1}{32}x^4 + \frac{5}{8}x^2 - 2 = 0 \quad | \cdot (-32)$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Substitutionsverfahren:

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 20z + 64 = 0$$

pq- oder abc-Formel:

$$z_1 = 16 \quad \text{oder} \quad z_2 = 4$$

$$x^2 = 16 \quad \quad \quad x^2 = 4$$

$$x_{1/2} = \pm 4 \quad \quad \quad x_{3/4} = \pm 2$$

1.10

$$-\frac{5}{2}x = 0$$

$$x = 0$$

1.11

$$\frac{3x-2}{2x+5} = 0$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ (Nennerpolynom Null setzen)

$$3x-2=0$$

$$x = \frac{2}{3} \in D$$



1.12

$$-\frac{2}{k}x + 6 = 4k + 1, \quad k \neq 0$$

Die Gleichung wird mit $-k$ multipliziert:

$$2x - 6k = -4k^2 - k$$

$$2x = -4k^2 + 5k$$

$$x = -2k^2 + 2,5k, \quad k \neq 0$$

1.13

Benötigte Formel:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 4x + \sin 3x = 0$$

$$2 \sin \frac{4x + 3x}{2} \cdot \cos \frac{4x - 3x}{2} = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(\frac{7x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{7x}{2}\right) = 0$$

oder

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{7x}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{7}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.14

$$-\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$4x^2 + 12x + 27 = 0$$

pq- oder abc-Formel \Rightarrow

keine reellen Lösungen (der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ).

1.15

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$$

$$(x+a)^3 = 0 \quad (\text{Binomische Formel})$$

$$x_{1/2/3} = -a$$

Man könnte aber auch die Polynomdivision oder das Horner Schema anwenden

1.16

$$2e^x(1-e^x) = 0 \quad | \cdot 2e^x, \quad \text{da } e^x > 0$$

$$1 - e^x = 0$$

$$x = 0$$



1.17

$$\frac{x^3 - k^2 x}{x + k} = 0$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{-k\}$ (Nennerpolynom wird Null gesetzt)

$$x^3 - k^2 x = 0$$

$$x(x^2 - k^2) = 0$$

$$x_1 = 0 \in D; \quad x_2 = k \in D; \quad x_3 = -k \notin D$$

Die Gleichung hat also die zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = k$

1.18

$$-\frac{3}{2}x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \pm 2$$

1.19

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.20

$$-\frac{1}{5}x - 2 = \frac{4}{3}$$

$$x = -16\frac{2}{3}$$

1.21

$$e^{\frac{1}{2}x} - e^x = 0 \quad / : e^{\frac{1}{2}x}, \quad \text{da } e^{\frac{1}{2}x} \neq 0$$

$$1 - e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = 1$$

$$\ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln 1$$

$$\frac{1}{2}x \ln e = 0$$

$$x = 0$$



1.22

$$-5x^3 - 15tx^2 + 16t^2x + 4t^3 = 0$$

Horner Schema (oder Polynomdivision):

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & -5 & -15t & 16t^2 & 4t^3 \\ \hline a=t & -5 & -20t & -4t^2 & 0 \end{array}$$

$$x_1 = t$$

$$-5x^2 - 20tx - 4t^2 = 0$$

abc-Formel (oder pq-Formel):

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{2,3} = \frac{20t \pm \sqrt{400t^2 - 80t^2}}{-10} = \frac{20t \pm \sqrt{320t^2}}{-10} = \frac{20t \pm \sqrt{64 \cdot 5t^2}}{-10} = -2t \pm \frac{4}{5}t\sqrt{5}$$

1.23 Benötigte Formeln:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 5x + \cos x = 0$$

$$\sin 5x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos \frac{5x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

oder

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



1.24

$$x^2 + bx - 2b^2 = 0$$

abc-Formel (oder pq-Formel)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8b^2}}{2}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{9b^2}}{2}$$

$$= \frac{-b \pm 3b}{2}$$

$$x_1 = -2b, \quad x_2 = b$$

1.25

$$\tan 4x = -1$$

$$4x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.26

$$\frac{4x^3 - 8x^2 - 11x - 3}{2x+1} = 0, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$4x^3 - 8x^2 - 11x - 3 = 0$$

Horner Schema (oder Polynomdivision)

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ & 4 & -8 & -11 & -3 \\ a=3 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 3 \in D$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x+1)^2 = 0$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \notin D \quad \Rightarrow \quad \text{Die Gleichung hat nur eine Lösung: } x_1 = 3.$$

1.27

$$(x^2 - k^2)e^{kx} = 0 \quad | :e^{kx}, \quad \text{da } e^{kx} \neq 0$$

$$x^2 - k^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm k$$



1.28

Benötigte Formel:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan 2x + \tan x = 0$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x = 0$$

$$\tan x = z \quad \text{Substitution}$$

$$\frac{2z}{1 - z^2} + z = 0 \quad | \cdot (1 - z^2), \quad D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$2z + z - z^3 = 0$$

$$z(3 - z^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_1 = 0 \in D$$

$$\tan x = 0$$

$$x_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = \sqrt{3} \in D$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_3 = -\sqrt{3} \in D$$

$$\tan x = -\sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.29

Benötigte Formel: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$\log_2(2x - 1) = 3$$

Definitionsbereich bestimmen:

$$2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Gleichung lösen:

$$2^3 = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 4,5 \in D$$

1.30

Benötigte Formel: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$\ln(2x + e) = 1$$

Definitionsbereich bestimmen:

$$2x + e > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{e}{2} \quad \Rightarrow \quad D = \left(-\frac{e}{2}, +\infty\right)$$

Gleichung lösen:

$$e^1 = 2x + e \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in D$$